

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	1.04.21	Корякина Е.В.	И

№1

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}, x - \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$$

1	2	3	4	5	Σ
2	7	5	0	2	16

при каком-то x значения должны быть целыми
рассмотрим число $x - \frac{1}{x}$ и найдём при каких значениях x число является целым

$$x=1 : 1 - \frac{1}{1} = 0 \text{ - целое}$$

$$x=-1 : -1 + \frac{1}{-1} = 0 \text{ - целое}$$

решения являются только значения 1 и -1.

подставим значения в любое из оставшихся чисел

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2022} \text{ - не целое}$$

значит не существует такого числа, при котором ~~все~~ 3 числа были бы целыми

Ответ: такого числа x нет

№2

$$\sin x + \sin^3 x + 2020 \cdot \sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2020 \cdot \cos^5(2x)$$

введём функцию $f(a_1) = f(\sin x)$

$$f(a_2) = f(\cos 2x)$$

$$f(a_1) = a_1 + a_1^3 + 2020 a_1^5$$

найдем производную:

$$f'(a_1) = 1 + 3a_1^2 + 10100a_1^4$$

Производная больше 0, значит функция возрастает монотонно

аналогично $f'(a_2)$

т.к. функции ~~монотонно~~ возрастают, то они пересекаются в одной точке

N2

$$f(a_1) = f(a_2)$$

$$f(\sin x) = f(\cos 2x)$$

$$\sin x = \cos 2x, \quad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad | \sin x = t$$

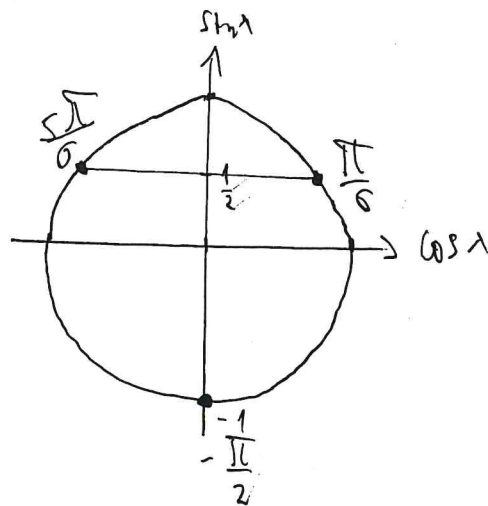
$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 8 = 3^2$$

$$t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \end{array} \right.$$

$$t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

+

N3

$$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$$

у многочлена есть целые корни, которые являются делителями свободного члена.

$$3: (\pm 3, \pm 1)$$

подставляем в $f(x)$

$$f(1) = 1^n + 5 \cdot 1^{n-1} + 3 \neq 0, \text{ т.к. в степени } n \geq 1 \quad 1+5+3=9$$

$$f(-1) \neq 0, \text{ т.к. в степени } n \geq 1 \quad 1+5+3 \text{ или } -1+5+3 \Rightarrow -1 \text{ или } 7$$

$$f(3) = 3^n + 5 \cdot 3^{n-1} + 3 \neq 0, \text{ т.к. } 3^n(1 + \frac{5}{3}) + 3 \neq 0$$

$$f(-3) \neq 0 - аналогично \quad \text{в любой степени } n \geq 1 \quad 3^n > 0$$

значит 1, -1, 3, -3 не являются корнями и нули (приведем к нулю) многочлена целых корней не будет

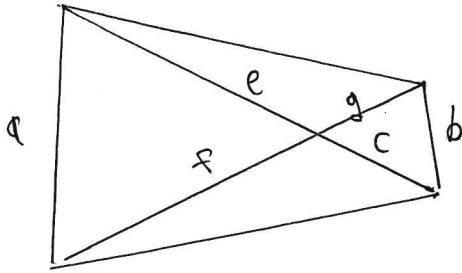
Ответ: нет, нельзя

$n - \text{цел.}? \text{ кор.}? \text{ кор.}? \text{ кор.}?$

+

противоположные стороны
 $a + b \neq d = \text{диагональ}$

№5



$S = 32$ вписанную диагональ одним из углов:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha = 32$$

$$d_1 d_2 \sin \alpha = 64$$

$$\sin \alpha = \frac{64}{d_1 d_2}$$

$$0 < \sin \alpha < 1 \Rightarrow 64 < d_1 d_2$$

первая диагональ меньше 8:

$$\{ d_1 \geq 64 \Rightarrow y \geq 8$$

$$\{ y \leq 2(8-d) \quad d < 8 \Rightarrow y < 16$$

$$\begin{cases} d + c > b \\ c + e > a \end{cases} \quad | +$$

$$(d + e) + (c + e) > a + b$$

$$d + e > a + b$$

$$d + e > 16 - d$$

$$y > 2(8 - d)$$

Ответ: $8 < y < 16$

7