ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004524

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 10 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	10
4.	Фамилия	К А Н Е В А
	Имя	Е Л Е Н А
	Отчество	К О Н С Т А Н Т И Н О В Н А
5.	Дата рождения	05 (число) 11 (месяц) 2004 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Санкт-Петербург
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Санкт-Петербург
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБОУ СОШ № 319

1	2	3	4	5	Σ
5	7	7	7	7	33

Шифр 004524

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

№3.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = c$

$f(1) = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = a+b+c$

$f(0) + f(1) = 0$

$c + a + b + c = 0$

$2c + a + b = 0$

$f(2) = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 4a + 2b + c$.

$f(3) = a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 9a + 3b + c$

$f(2) + f(3) = 0$

$4a + 2b + c + 9a + 3b + c = 0$

$13a + 5b + 2c = 0$

$2c + a + b = 13a + 5b + 2c$

$12a = -4b$

$\frac{12}{4} = -\frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} = 3$

$f(x) = 2022$

$ax^2 + bx + c = 2022$

$ax^2 + bx + c - 2022 = 0$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$

Ответ: сумма корней уравнения $f(x) = 2022$ равна 3

Место для скобы

Шифр 004524

№4

$$\sqrt[2020]{2019\cdot 2020^{-1}}+\sqrt[2020]{2020\cdot 2017^{-1}}>2$$

$$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}>2$$

Докажем, что $a+\frac{1}{a}>2$

по неравенству Коши (неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом)

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{2}>\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}$$

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{2}>1$$

$a+\frac{1}{a}>2$ ч.т.д. ▨

Подставим $a=\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}$

$$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\frac{1}{\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}}>2$$

$$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}}>2$$

При этом

$\sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}}<\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}$ т.к. $\frac{2020}{2019}<\frac{2020}{2017}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}>2$$

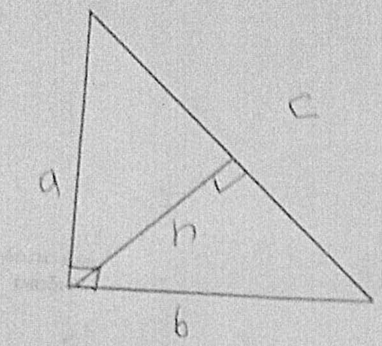
ч.т.д

Ответ: доказали

Место для скобы

Шифр 004524

№5.



Прямоугольный △
a, b – катеты
c – гипотенуза
h – высота к гипотенузе

$c+h < a+b$

Т.к. $c+h>0$ и $a+b>0$ то возведем обе части неравенства во вторую степень

$(c+h)^2 < (a+b)^2$

$c^2+2ch+h^2 < a^2+b^2+2ab$

Т.к. h – высота к гипотенузе $\Rightarrow h=\frac{ab}{c}$

$c^2+\frac{2\cdot c\cdot ab}{c}+\left(\frac{ab}{c}\right)^2 < a^2+b^2+2ab$

$c^2+2ab+\left(\frac{ab}{c}\right)^2 < a^2+b^2+2ab$

$c^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2 < a^2+b^2$

По теореме Пифагора $c^2=a^2+b^2$

$c^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2 < c^2$

Возникает противоречие, т.к. $\left(\frac{ab}{c}\right)^2>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не возможно, чтобы $c+h<a+b$

Ответ: не возможно, чтобы $c+h<a+b$

№2

$$\begin{cases} 3xy - 5yz - xz = 3y \\ -5xy + 4yz + xz = -4y, \\ xy + yz = -y, \end{cases}$$

Сложим первое и второе уравнение

$3xy - 5yz - xz - 5xy + 4yz + xz = 3y - 4y$

$-2xy - yz = -y$

Сложим полученное и третье уравнение

$xy + yz - 2xy - yz = -y - y$

$-xy = -2y$

$xy = 2y$

Рассмотрим 2 случая

1. $y = 0 \Rightarrow -5x \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot z + xz = -4 \cdot 0$

$xz = 0$

$x = 0 \Rightarrow z$ – любое или рациональное число (R)

$z = 0 \Rightarrow x$ – любое рациональное число (R)

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = R \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = R, \\ z = 0, \end{cases}$$

2. $y \neq 0$

$xy = 2y \quad |:y, \; y \neq 0$

$x = 2 \Rightarrow$

Место для скобы

Шифр

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\cdot 2\cdot y - 5yz - 2z = 3y \\ -5\cdot 2\cdot y + 4yz = -4y, \\ 2y + yz = -y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6y - 5yz - 2z = 3y \\ -10y + 4yz + 2z = -4y, \\ yz = -3y \end{cases}$$

$$yz = -3y \quad |:y,\ y \neq 0$$

$$z = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot 2\cdot y - \overset{15}{5}y\cdot(-3) - 2\cdot(-3) = 3y$$

$$6y + 15 + 6 = 3y$$

$$3y + 15y + 6 = 0$$

$$18y = -6$$

$$y = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{3}, \\ z = -3 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \\ z = R \end{cases}$; $\begin{cases} y = 0 \\ x = R, \\ z = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} y = -\frac{1}{3} \\ x = 2, \\ z = -3 \end{cases}$;

Место для скобы

Шифр

№1.

$\sqrt{x^2+2020}-x$

$\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020}$

$\cancel{\sqrt{}}\ 2x-\sqrt{x^2+2020}$

Рассмотрим второе выражение
пара чисел $\sqrt{x^2+2}$ и $\sqrt{x^2+2020}$ должны
в сумме давать не обязательно рациональное? число
Это возможно, если оба числа рациональны
или оба числа иррациональны
Заметим, x^2+2 и x^2+2020 отличаются между собой на 2018
из числа 2018 нет целого корня,
Кроме того, одно из них положительное, а другое отрицательное
Поэтому, чтобы их сумма была рациональным числом, оба числа должны быть иррациональными
~~Далее если целые числа~~
Далее если первые два числа целые, то их сумма тоже целое $\Rightarrow$ $\cancel{x-\sqrt{x^2+2020}}$

$\sqrt{x^2+2020}-x+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020}=$
$\sqrt{x^2+2}-x \Rightarrow$

Место для скобы

Шифр

$\Rightarrow \sqrt{x^2+2} - x$ – тоже целое, но тогда $x - \sqrt{x^2+2}$ тоже целое число и $2x - 2\sqrt{x^2+2}$ тоже целое $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~Ох~~ $2x - 2\sqrt{x^2+2} - 2x + \sqrt{x^2+2020} =$

$= \sqrt{x^2+2020} - 2\sqrt{x^2+2}$

Добавим третье целое число и получим $2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+2020}$ – тоже целое $\Rightarrow \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+2020}$ – целое и $2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+2020}$ – целое, но в самом начале мы выяснили, что $\sqrt{x^2+2}$ и $\sqrt{x^2+2020}$ ~~должны~~ быть иррациональными оба

Противоречие

Ответ: не существует такой x