ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004426

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	К А Л И Н И Н
	Имя	М И Х А И Л
	Отчество	Д М И Т Р И Е В И Ч
5.	Дата рождения	07 (число) 08 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Ростов-на-Дону
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ Лицей 27

Чистовик

① 004426

№2

$\sin 2x + \sin^5 2x + 2020 \cdot \sin^9 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020 \cdot \cos^9 4x$

1) Введем 2 функции и сделаем замену, пусть $\sin 2x = a$, $\cos 4x = b$, тогда

$f(a) = a + a^5 + 2020a^9$,

$f(b) = b + b^5 + 2020b^9$

1	2	3	4	5	Σ
2	7	~~2~~ 1	3	5	~~19~~

18б

14.04.21

2) Найдем производную первой функции ($f(a)$):

$f'(a) = 1 + 5a^4 + 18180a^8$, поскольку $a^4 \geq 0$ и $a^8 \geq 0$ из-за четных степеней, функция $f(a)$ монотонно возрастает

3) Найдем производную 2-ой функции ($f(b)$):

$f'(b) = 1 + 5b^4 + 18180b^8$, она тоже монотонно возрастает, ведь $b^4 \geq 0$ всегда и $b^8 \geq 0$ всегда.

4) Значит $f(a) = f(b)$, только в единственном случае, когда $a = b$, значит $\sin 2x = \cos 4x$

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

$2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$

Пусть $\sin 2x = t$,

$2t^2 + t - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

Чистовик

2

004426

№2 продолжение

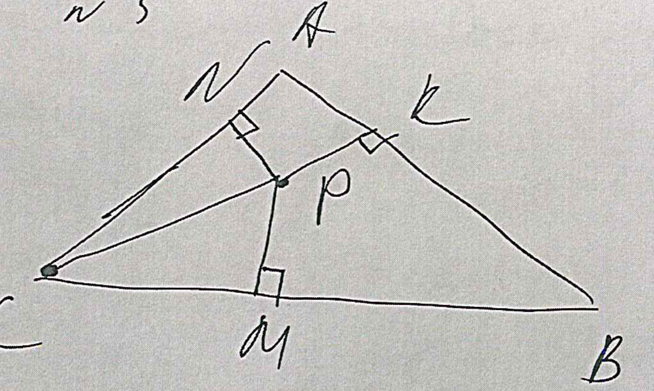
$t_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}$; $t_1=-1$; $t_2=\frac{1}{2}$

Делаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=-1\\ \sin 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z\\ x=\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in Z\\ x=\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in Z\end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z$$

Ответ. $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$

№5



Решение:

1) Допустим, что $AB=a$, $BC=b$, $CA=c$ соответственно, а также $PK=a_1$, $PM=b_1$, $NP=c_1$, нам нужно найти: $\min\left(\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}\right)$

2) Распишем $S_{\triangle ABC}$, $S_{ABC}=S_{APC}+S_{APB}+S_{BPC}=\frac{1}{2}\cdot c_1\cdot c+\frac{1}{2}\cdot a_1\cdot a+\frac{1}{2}\cdot b\cdot b_1$, значит $2S_{ABC}=a\cdot a_1+b\cdot b_1+c\cdot c_1$

3) Умножим обе части равенства на $\left(\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}\right)$ и получим:

$$\left(\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}\right)\cdot 2S_{ABC}=\left(\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}\right)\left(a\cdot a_1+b\cdot b_1+c c_1\right)=$$

Чистовик

№5 продолжение

$= a^2+b^2+c^2+\frac{ab\cdot b_1}{a_1}+\frac{a\cdot c\cdot c_1}{c_1}+\frac{b\cdot a\cdot a_1}{b_1}+\frac{b\cdot c\cdot c_1}{b_1}+\frac{c\cdot a\cdot a_1}{c_1}+$

$+\frac{c\cdot b\cdot b_1}{c_1}=a^2+b^2+c^2+ca\left(\frac{c_1}{a_1}+\frac{a_1}{c_1}\right)+ab\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{a_1}{b_1}\right)+b\cdot c\cdot\left(\right.$

$\cdot\left(\frac{c_1}{b_1}+\frac{b_1}{c_1}\right)$

4) Можно заметить, что $\frac{b_1}{a_1}$ и $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{c_1}{a_1}$ и $\frac{a_1}{c_1}$, $\frac{c_1}{b_1}$ и $\frac{b_1}{c_1}$ — взаимообратные числа, значит по неравенству о средних,

$\frac{c_1}{a_1}+\frac{a_1}{c_1}\geqslant 2$

$\frac{b_1}{a_1}+\frac{a_1}{b_1}\geqslant 2$

$\frac{c_1}{b_1}+\frac{b_1}{c_1}\geqslant 2$, Неравенство о средних, достигается при равенстве слагаемых, значит

$a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{a_1}{b_1}\right)+ac\left(\frac{c_1}{a_1}+\frac{a_1}{c_1}\right)+bc\left(\frac{c_1}{b_1}+\frac{b_1}{c_1}\right)\geqslant a^2+b^2+$

$+c^2+2ab+2ac+2bc$ достигает минимального значения при равенстве обеих частей, значит $a_1=b_1=c_1$,

Исходя из этого, P — центр вписанной окружности. ?

Ответ. P — центр вписанной окружности.

I

Чистовик (4)

№3

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$

1) ~~В~~оспользовавшись теоремой Виета для многочлена n-ой степени, мы получим,

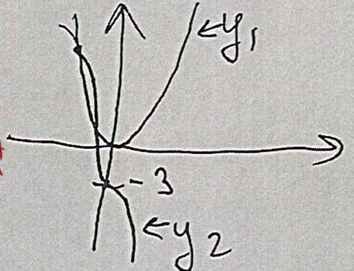
$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_k = -5 \\ t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot \ldots \cdot t_k = 3 \end{cases}$$

t_j - корни, где $1 \le j \le k$, j - целое

2) $t^n + 5t^{n-1} + 3 = 0$, выразим t^n,

$t^n = -5t^{n-1} + 3$, введем 2 функции и схематично построим их графики: $y_1 = t^n$, $y_2 = -5t^{n-1} - 3$

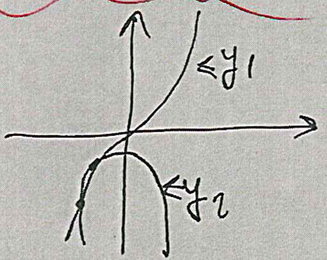
Некорр. постр



~~Графики~~ График, при n - четных.

Будет не более двух отриц. корней

Построим график при n-нечетных,



тоже будет не более двух отриц. корней

3) Поскольку по теореме Виета количество отриц. корней четное, из того, что $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot \ldots \cdot t_k = 3$, то будет 2 отрицательных корня.

№3

Продолжение:

Значит

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -5 \\ t_1 \cdot t_2 = 3 \end{cases}$$, значит $t^2 + 5t + 3 = 0$ имеет точно такие же решения, $D = 25 - 12 = 13$

$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$; Поскольку $\sqrt{13} \approx 3{,}6$, то $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2} < 0$, а значит $t_{1,2} < 0$

Поскольку и при четных, и при нечетных n будет 2 отр. корня, то можно выделить квадратный трехчлен - сомножитель

4) Из многочлена $p(t)$ можно выделить множитель $f(t) = t^2 + 5t + 3$, а второй множитель тогда будет $y(t) = t^{n-2} + 3t^{n-4} + \ldots + 1$, поскольку

$$t^n + 5^{n-1} + 3 \,\Big|\, \frac{t^2 + 5t + 3}{t^{n-2} + 3t^{n-4} + \ldots + 1}$$

Ответ. Да, возможно представить в виде произведения.

X Ответ некрит. Нерост. обосн.

№4

$$\frac{x^3}{m + \sqrt[3]{2020^4}\, x} \leq \frac{3}{2} - \frac{m}{x \cdot (x^2 + \sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4} \cdot x}{m + x^3}$$

Допустим, что $\sqrt[3]{2020^4} \cdot x = t$, $t > 0$

$$\frac{x^3}{m + t} + \frac{m}{x^3 + t} \leq \frac{3}{2}$$??

Поскольку сумма и отношение положительных чисел положительные, то

№4 Продолжение:

$$\frac{1}{\frac{x^3}{m+t}+\frac{m}{x^3+t}+\frac{t}{m+x^3}} \geq \frac{2}{3} \quad \Big| \cdot 3$$

?

$$\frac{3}{\frac{x^3}{m+t}+\frac{m}{m^3+t}+\frac{t}{m+x^3}} \geq 2 \quad (1)$$

Воспользовавшись неравенством о средних $\left(\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}\right)$ равенство достигается при $a=b=c$

Поэтому, из полученного неравенства (1) получим:

$$\frac{m+t}{x^3}+\frac{x^3+t}{m}+\frac{m+x^3}{t} \geq \frac{3}{\frac{x^3}{m+t}+\frac{m}{x^3+t}+\frac{t}{m+x^3}} \geq 2$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{m+t}{x^3}+\frac{x^3+t}{m}+\frac{m+x^3}{t}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{m}{x^3}+\frac{x^3}{m}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{t}{x^3}+\frac{x^3}{t}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{t}{m}+\frac{m}{t}}_{\geq 2}\right) \geq 2$$

значит все неравенство больше или равно 2.

Также заметим, что оценка в последнем неравенстве достигается при тех же условиях, что и в исходном неравенстве, значит $\begin{cases} x^3=m \\ m=t \\ x^3=t \end{cases}$, значит $x^3 = \sqrt[3]{2020^4}\,x$, поскольку $x>0$, то $x^2 = \sqrt[3]{2020^4}$, а значит $x = \sqrt[3]{2020^4}$, т. к. $x>0$,

№4 Продолжение (7)

~~…~~ а значит $m = 2020^2$, это m — минимальное, а значит $m \geq 2020^2$

Ответ. $m \geq 2020^2$

№1

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$; $x - \frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$;

Сделаем замену, $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} = A$, $x - \frac{1}{x} = B$, $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x} = C$

Поскольку сумма целых целая, то сложим A и B

$A + B = x - \frac{1}{x^2+2021}$, сумма должна быть целой,

Но тогда $\frac{1}{x^2+2021}$ — точно дробь меньше единицы, а значит дробное число. У числа x и у числа $\frac{1}{x}$ одинаковая дробная часть. Но это происходит только при $x = \pm 1$ в исходных числах, но тогда A и C — дробные.

~~Ответ Нет, не существует~~

Также $\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{дробь от } -1 \text{ до } 1} - \frac{1}{x^2+2021}$ — это целое, в 1 случае:

$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+2021}$

$x^2 - x + 2021 = 0$

$D < 0 \Rightarrow$ такого случая быть не может

Ответ Нет, не существует.