ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004522

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 10 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	10
4.	Фамилия	К А Ч А Н О В
	Имя	Д А Н И И Л
	Отчество	В Л А Д И М И Р О В И Ч
5.	Дата рождения	12 (число) 08 (месяц) 2004 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ставропольский край
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Станица
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	ст -ца Суворовская
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ СОШ №2

1	2	3	4	5	Σ
6	6	7	7	–	26

Место для скобы

Шифр 004522

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

№4

* Докажем, что для $a>0$ верно $a+\frac{1}{a}\geq 2$:

$$\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geq 0 \Rightarrow (\sqrt{a})^2-2\cdot\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\geq 0 \Rightarrow (\sqrt{a})^2+\frac{1}{(\sqrt{a})^2}\geq 2 \Rightarrow$$

$$a+\frac{1}{a}\geq 2.$$

Далее заметим, что $\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}>\sqrt[2020]{\frac{2017}{2020}}$; т.к. $f(x)=\sqrt[2020]{x}$ возрастает и при $f(a)>f(b)$ $a>b$. Тогда справедливо утверждать, что

$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}>\sqrt[2020]{\frac{2017}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}$, в свою очередь (см. *)

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \Rightarrow \sqrt[2020]{\frac{2017}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}\geq 2; \Longrightarrow$$

$$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}>\sqrt[2020]{\frac{2017}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}\geq 2 \Longrightarrow$$

$$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}>2;$$ ч.т.д.

№3

Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$; Тогда при $f(0)+f(1)=0$:

$a\cdot 0^2+b\cdot 0+c+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0 \Rightarrow a+b+2c=0$; В тоже время: $f(2)+f(3)=0 \Rightarrow 2^2\cdot a+2\cdot b+c+3^2\cdot a+3\cdot b+c=0 \Rightarrow$

$4a+2b+c+9a+3b+c=0 \Rightarrow 13a+5b+2c=0$;

Место для скобы

Шифр 004522

Получаем систему:

$$\begin{cases} a+b+2c=0; \Rightarrow 2c=-a-b \\ 13a+5b+2c=0 \Rightarrow 13a+5b-a-b=0 \Rightarrow 12a+4b=0 \Rightarrow 3a+b=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow b=-3a;$

$2c=-a-b \Rightarrow c=\frac{-a-b}{2} \Rightarrow c=\frac{-a-(-3a)}{2} \Rightarrow c=\frac{2a}{2};\ c=a$

$f(x)=ax^2-3ax+a; \Rightarrow f(x)-2022=0; \Rightarrow ax^2-3ax+a-2022=0$

По теореме Виета сумма корней: $x_1+x_2=\frac{-(-3a)}{a} \Rightarrow$

$x_1+x_2=3.$

Ответ: 3

~~Ответ: 3. (см продолжение решения на стр. 4)~~

N5

$2S=ab$; и $2S=ch \Rightarrow ab=ch \Rightarrow h=\frac{ab}{c}.$

Докажем, что $c+h>a+b;$

$c+\frac{ab}{c}>a+b;\ c>0 \Rightarrow c^2+ab>ac+bc; \Rightarrow (c^2-ac)+ab-bc$

$\Rightarrow c(c-a)-b(c-a)>0 \Rightarrow (c-b)(c-a)>0.$

По свойствам прямоугольного треугольника гипотенуза наибольшая сторона в треугольнике $\Rightarrow \begin{cases} c>a \\ c>b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c-b>0 \\ c-a>0 \end{cases} \Rightarrow (c-b)\cdot(c-a)>0$

$\Rightarrow$ доказано, что $c+h>a+b \Rightarrow c+h<a+b$ невозможно.

Ответ: нет, невозможно.

N2

$$\begin{cases} 3xy-5yz-xz=3y \\ -5xy+4yz+xz=-4y \\ xy+yz=-y. \end{cases}$$

I. $y=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x\cdot0-5\cdot0\cdot z-xz=3\cdot0 \\ -5x\cdot0+4\cdot0\cdot z+xz=-4\cdot0 \\ x\cdot0+z\cdot0=-0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{0=0}\ xz=0 \\ xz=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$

Условия системы выполняются при $xz=0$; $\Rightarrow x=0$ или $z=0$; $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; \Rightarrow z \text{ – любой} \\ z=0; \Rightarrow x \text{ – любой} \end{array}\right.$

$\Rightarrow (0;0;k); (k;0;0)$ где k – любое число

II. $y \neq 0 \Rightarrow$ допустимо делить y и $-y$:

$\begin{cases} 3xy-5yz-xz=3y; \\ -5xy+4yz+xz=-4y; \end{cases}$ сложим два выражения системы: $(3xy-5xy)+(4yz-5yz)+(xz-xz)=3y+4y$

$xy+yz=-y; \Rightarrow x+z=-1$

$\Rightarrow -2xy-yz=\cancel{7y}\ -y \Rightarrow 2x+z=1 \Rightarrow \begin{cases} 2x+z=1 \\ x+z=-1 \Rightarrow z=-1-x \end{cases}$

$\Rightarrow 2x+(-1-x)=1 \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow z=-3 \Rightarrow -6y+15y+6=3y$

$\Rightarrow 6y=-6 \Rightarrow y=-1$

Ответ: $(2;\cancel{0}\,-1;-3)$; $(0;0;k)$; $(k;0;0)$ где k – любое.

№1

Сумма двух целых чисел – целое число $\Rightarrow$ если все три указанных числа целые, то $(\sqrt{x^2+2020}-x)+(2x-\sqrt{x^2+2020})$ – целое $\Rightarrow x$ – целый $\Rightarrow$ $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020}$ – тоже должно быть целым.

Рассмотрим случаи: 1) $\sqrt{x^2+2}$ – целое и $\sqrt{x^2+2020}$ – целое $\Rightarrow$ все устраивает. 2) $\sqrt{x^2+2}$ – целое, а $\sqrt{x^2+2020}$ – нецелое $\Rightarrow$ не устраивает. (целое – нецелое = нецелое) 3) $\sqrt{x^2+2}$ – нецелое; $\sqrt{x^2+2020}$ – целое не устраивает (см. случай 2). 4) $\sqrt{x^2+2}$ – нецелое и

$\sqrt{x^2+2020}$ - нецелое $\Rightarrow$ выражение вида $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ должно быть целым. Это невозможно, так как оба выражения иррациональны и при этом их разность не ноль. ($\sqrt{x^2+2} \neq \sqrt{x^2+2020}$; т.к. $x^2+2 \neq x^2+2020$; т.к. $2 \neq 2020$). $\Rightarrow$ не устраивает
$\Rightarrow$ возможен только случай 1) $\Rightarrow$

$\sqrt{x^2+2}$ - целое $\Rightarrow x^2+2=c^2$; где $c \in Z \Rightarrow 2=c^2-x^2$
$\Rightarrow 2=(c-x)(c+x)$; $c-x$ и $c+x$ целые $\Rightarrow$ переберём целые делители 2: $2=2\cdot1=1\cdot2=-1\cdot-2=-2\cdot-1$

$\Rightarrow$ 1) $\begin{cases} c-x=1 \\ c+x=2 \end{cases}$ сложим и получим $2c=3 \Rightarrow c=1{,}5$ - нецелое

2) $\begin{cases} c-x=2 \\ c+x=1 \end{cases}$ сложим и получим $2c=3 \Rightarrow c=1{,}5$ - нецелое.

3) $\begin{cases} c-x=-1 \\ c+x=-2 \end{cases} \Rightarrow$ сложим: $2c=-3 \Rightarrow c=-1{,}5$ - нецелое

4) $\begin{cases} c-x=-2 \\ c+x=-1 \end{cases} \Rightarrow 2c=-3 \Rightarrow c=-1{,}5$ - нецелое

$\Rightarrow$ Это невозможно, возникает противоречие.

Ответ: нет.

№3

$ax^2-3ax+a-2020=0$; $\Rightarrow D=9a^2-4a^2+8080a=5a^2+8080a=5a(a+1616) \Rightarrow$

1) $x_1+x_2=3$ при $D>0$ и $a(a+1616)>0 \Rightarrow$ при $a \notin [-1616;0]$

2) $a=0 \Rightarrow f(x)$ не квадратный трёхчлен - противоречит условию.

3) $a=-1616 \Rightarrow D=0 \Rightarrow$ корень только один: $x=\frac{-b}{2a}=\frac{3a}{2a}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}$ - сумма корней.

4) $a \in (-1616;0) \Rightarrow D<0 \Rightarrow$ корней нет $\Rightarrow$ их сумма 0.

Ответ: $a=-1616$: $\frac{3}{2}$; $a \in (-1616;0)$: 0; $a \notin [-1616;0]$: 3. где a - старший коэффициент трёхчлена $f(x)$).