Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004405

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	математика
2.	Вариант	2
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ИВАННИКОВА
	Имя	АНФИСА
	Отчество	ОЛЕГОВНА
5.	Дата рождения	08 (Число) 08 (Месяц) 2003 (Год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Томская обл.
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Томск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ Гимназия №6

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ______

Место для скобы

Шифр 004405

(1) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2020}$, $x - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2020} - \frac{1}{x}$

существует ли такое число x, что все три числа являются целыми?

Предположим, что существует такое число x, при котором все три числа - целые. Так как третье и первое числа отличаются одним знаком, то рассмотрим первые два числа: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2020}$, $x - \frac{1}{x}$.

Представим, что такое x, делающее первые два числа целыми, существует => составим систему

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = k;\ k \in Z & (1) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2020} = p;\ p \in Z & (2) \end{cases}$$

тогда выразим из ур-я (1): $x^2 = 1 + kx$, далее подставив во (2)е ур-е:

$\frac{1}{x} - \frac{1}{1+kx+2020} = p$, тогда $x(k - 1 - pk^2 - 2021) = pk - 2021$ =>

=> $x \in Q: x = \frac{\tilde{p}}{\tilde{k}}\ \tilde{p} \in Z, \tilde{k} \in Z$, но из этого следует, что 7б

$x - \frac{1}{x} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{k}} - \frac{\tilde{k}}{\tilde{p}} \notin Z$ => такого числа x не существует.

Ответ: не существует ✓

(2) $\sin x + \sin^3 x + 2021 \cdot \sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2021 \cdot \cos^5(2x)$

решите ур-е:

Предположим, что: • $\sin x \neq 0$, т.к если $\sin x = 0$ => $x = \Pi k$ => $\cos(2 \cdot 2\Pi) = 1$

• $\cos 2x \neq 0$, т.к если $\cos 2x = 0$ => $x = \frac{\Pi}{4} + \frac{\Pi k}{2}$ => $\sin(\frac{\Pi}{4} + \frac{\Pi k}{2}) \neq 0$

пусть $a = \sin x$; $a \neq 0$
$b = \cos 2x$; $b \neq 0$
=> (1) $\sin x + \sin^3 x + 2021 \cdot \sin^5 x = \cos 2x + \cos^3 2x + 2021 \cdot \cos^5 2x$

(2) $a + a^3 + 2021a^5 = b + b^3 + 2021b^5$ => $(a-b) + a^3 - b^3 + 2021(a^5 - b^5) = 0$ =>

=> (3) $(a-b)[a^2 + ab + b^2 + 2021(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)] = 0$

$ab > 0$, т.к: во (2) левую часть умножить на $\frac{a}{a} = 1$ =>
правую часть умножить на $\frac{b}{b} = 1$

$\frac{\underbrace{a^2 + a^4 + 2021b^6}_{A,\ >0}}{a} = \frac{\underbrace{b^2 + b^4 + 2021b^6}_{B,\ >0}}{b}$ =>

1	2	3	4	5	~~6~~
7	7	7	5	0	

Итого: 26б

Место для скобы

Шифр 004405

$\Rightarrow \left(\frac{A}{B}\right)_{>0} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow$ а и в одного знака $= a \cdot b > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + ab + b^2 + 2021(a^4 + ab \cdot a^2 + a^2b^2 + ab \cdot b^2 + b^4) > 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x - \cos 2x = 0 \Rightarrow \sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} = 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \\ k \in Z \\ x = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{6} + \\ + \pi m; m \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x = (-1)^m \cdot \frac{\pi}{6} + \pi m; m \in Z$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in Z$

7б

③ $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$, n - целое число. Возможно ли представить $p(t)$ как произведение многочленов (+) степени с целыми коэф.?

Представим, что данное действие возможно. Отталкиваясь от этого $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3 = (t^p + b_{p-1}t^{p-1} + \dots + b_0) \cdot (t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \dots + a_0)$, (все коэффициенты - целые числа), $r + p = n \Rightarrow$ т.к $b_0 a_0 = 3$, то $a_0 = 1$ или 3, $b_0 = 1$ или $3 \Rightarrow$ представим, что $a_0 = 3$, а $b_0 = 1$.

Допустим, что корни нашего многочлена, скорее всего, целые числа и делители числа 3. Проверим, имеет ли многочлен рациональные корни.

$1 < r < n-1$. Сравним коэффициенты: $\begin{cases} b_0 a_0 = 3 \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 \\ a_{r-1} b_0 + a_{r-2} b_1 + \dots = 0 \\ a_{r-1} b_1 + b_0 + a_{r-2} b_2 + \dots = 0 \end{cases} \Rightarrow$

7б

$\Rightarrow$ видим из равенств с (r), что $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$ делятся на 3, тогда и b_0 делится на 3. Но, как можно увидеть выше, $b_0 = 1 \Rightarrow$ данное действие невозможно.

Ответ: невозможно

Место для скобы

Шифр 004405

④ найти все значения $a>0$, при которых существуют полож. решения неравенства:
$$\frac{x^3}{a+\sqrt[3]{2021^4}\cdot x}+\frac{\sqrt[3]{2021^4}\cdot x}{a+x^3}\le\frac{3}{2}-\frac{a}{x(x^2+\sqrt[3]{2021^4})}$$

Пусть $x^3=k$, а $\sqrt[3]{2021^4}\cdot x=m$, тогда неравенство примет вид:
$$\frac{k}{a+m}+\frac{m}{a+k}\le\frac{3}{2}-\frac{a}{k+m}$$

5б

$$\frac{k}{a+m}+\frac{m}{a+k}+\frac{a}{k+m}\le\frac{3}{2}$$

$(a>0,\ m>0,\ k>0)$, тогда меняется знак неравенства

$$\frac{k}{a+m}+\frac{m}{a+k}+\frac{a}{k+m}\ge\frac{3}{2}$$?

$$\frac{k}{a+m}+\frac{m}{a+k}+\frac{a}{k+m}=\frac{3}{2} \text{ при } (m=a=k) \Rightarrow$$

недост. обоснование

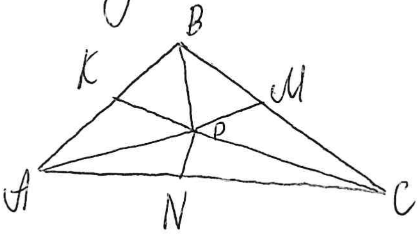
$$x^3=\sqrt[3]{2021^4}\cdot x$$
$$\frac{x^3}{x}=\sqrt[3]{2021^4}$$
$$x^2=\sqrt[3]{2021^4}$$
$$x=\sqrt[3]{2021^2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x^3=2021^2=2021\cdot2021=4084441=a$

Ответ: $a=4084441$.

⑤ Пусть $AB=a$, $CA=b$, $CB=c$, $KP=m$, $MP=p$, $NP=x$

Найти: (·) минимума $\frac{a}{m}+\frac{b}{x}+\frac{c}{p}$



0б