Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004247

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ХРИСТОФОРОВ
	Имя	ВЛАДИСЛАВ
	Отчество	НИКОЛАЕВИЧ
5.	Дата рождения	Число: 23; Месяц: 11; Год: 2003
6.	Страна	РОССИЯ
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	РС(Я)
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Якутск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБНОУ РС(Я) РЛИ

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ХВН

Место для скобы

Шифр 004247

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16 б	6.04.21	Гендриско И.Ю.	[подпись]

1	2	3	4	5
5	7	4	0	0

1. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2020}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2020}-\frac{1}{x}$

пусть все три числа целые. Тогда первое число:

$\frac{x^2+2020-x}{x^3+2020x}$ - целое. Значит числитель $(x^2+2020-x)$ нацело делится на знаменатель $(x^3+2020x)$

$$\begin{array}{r|l} x^2-x+2020 & x^3+2020x \\ -\ x^2+2020 & \frac{1}{x} \\ \hline -x-2020+2020 & \end{array}$$

$\Rightarrow x^2-x+2020=\frac{1}{x}(x^3+2020x)-x$

$\frac{1}{x}(x^3+2020x) \vdots x^3+2020x$

Значит $(-x)$ должно делится на $(x^3+2020x)$

$\frac{-x}{x^3+2020x}=-\frac{1}{x^2+2020}$ $\quad x^2+2020\geqslant 2020$ при ~~...~~ любых x

$\Rightarrow$ ~~$\frac{...}{x^2+2020}$ ...~~ (-1) не делится на (x^2+2020) нацело

Таким образом число $\frac{x^2+2020-x}{x^3+2020x}$ не целое при любых x

Ответ не существует

продол. обосн. 5 б

2. $\sin x+\sin^3 x+2021\cdot\sin^5 x=\cos(2x)+\cos^3(2x)+2021\cdot\cos^5(2x)$

$\exists \sin x = t$, $\cos(2x)=z$

$t+t^3+2021t^5=z+z^3+2021z^5$

$t(1+t^2+2021t^4)=z(1+z^2+2021z^4)$

$\frac{t}{1+z^2+2021z^4}=\frac{z}{1+t^2+2021t^4}$

7 б

$\Rightarrow \begin{cases} kt=nz \\ k(1+z^2+2021z^4)=n(1+t^2+2021t^4) \end{cases} \Rightarrow t=\frac{n}{k}z$

$1+z^2+2021z^4=\frac{n}{k}(1+t^2+2021t^4)$

$1+z^2+2021z^4=\frac{n}{k}\left(1+\left(\frac{n}{k}\right)^2z^2+\left(\frac{n}{k}\right)^4\cdot 2021\cdot z^4\right)$

Место для скобы

Шифр 004247

2. $1+z^2+2021z^4 = \frac{n}{k} + \left(\frac{n}{k}\right)^3 \cdot z^2 + \left(\frac{n}{k}\right)^5 \cdot 2021 \cdot z^4$

$\exists\ z^2 = b$

$$1+b+2021b^2 = \frac{n}{k} + \left(\frac{n}{k}\right)^3 \cdot b + 2021 b^2 \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^5$$

$$2021 b^2\left(1-\left(\frac{n}{k}\right)^5\right) + b\left(1-\left(\frac{n}{k}\right)^3\right) + \left(1-\frac{n}{k}\right) = 0$$

$\exists\ \frac{n}{k} = a \qquad D = 1 - 2a^3 + a^6 - 4(2021 - 2021a - \cancel{a^5 + a^6}\ 2021a^5 + 2021a^6)$

$D = 1 - 2a^3 + a^6 - 8084 + 8084a + 8084a^5 - 8084a^6 \geq 0$

$D = -8083a^6 + 8084a^5 - 2a^3 + 8084a - 8083 \geq 0$

Одни из решений это $a=1$. Т.к. 8083 – это простое число, то других решений нет. Значит $\frac{n}{k} = 1 \Rightarrow n = k$.

$\Rightarrow t = z \Rightarrow \sin x = \cos(2x)$

$\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$\sin x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$

$\sin x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Ответ $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$

4б

3. $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$

Пусть $n=2$: $p(t) = t^2+5t+3$

$t^2+5t+3=0$

$D = 25-12 = 13$

$t_1 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$

$t_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$

$t^2+5t+3 = \left(t - \frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)\left(t - \frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)$

Как мы видим, последние коэффициенты двух многочленов не целые. Значит представить $p(t)$ данным в усл-ии образом в общем случае невозможно

Ответ: нет, не возможно

Доке одного случая не доказано