ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004534

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 9 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	9
4.	Фамилия	Х Р Е Н О В
	Имя	А Р Т У Р
	Отчество	С Е Р Г Е Е В И Ч
5.	Дата рождения	2 8 (число) 1 2 (месяц) 2 0 0 5 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ивановская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Иваново
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ ЛИЦЕЙ № 33

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	–	3	24

Ену

Место для скобы

Шифр 004534

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

Задача №1.

$$\frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-ab+b^2} - \frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2} = \frac{2ab(a^3+b^3)}{a^2-ab+b^2} + \frac{(a^4-b^4)(b+a)}{a^2-b^2} =$$

$$= \frac{2ab(a+b)\cancel{(a^2-ab+b^2)}}{\cancel{a^2-ab+b^2}} + \frac{\cancel{(a^2-b^2)}(a^2+b^2)(b+a)}{\cancel{a^2-b^2}} =$$

$$= 2ab(a+b)+(a+b)(a^2+b^2) = (a+b)(a^2+b^2+2ab) =$$

$$= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)^3,$$ при $a \neq b$, $a \neq -b$, $a^2-ab+b^2 \neq 0$

Если $a = -2,\underbrace{4\ldots44}_{2021}$, $b = -1,\underbrace{5\ldots55}_{2020}6$, то

$(a+b)^3 =$

т.к после запятой в обеих дробях кол-во знаков одинаково - 2021, то можем сложить последнюю цифру с последней, и т.д. складываем a+b:

1) 6+4 = 10 – переход через разряд

2) 5+4 = 9+1 = 10 – переход через разряд

3) 5+4 = 9+1 – переход через разряд

Итого, мы получаем, что в каждом разряде будет переход через разряд, и т.к. в конечной сумме после запятой будут только нули, т.к. в каждом разряде будет такая сумма 5+4+1 – из др. разряда равная 10., и кол-во знаков после запятой одинаково

Итого: числа $-0,\underbrace{4\ldots44}_{2021} - 0,\underbrace{5\ldots55}_{2020}6 = -1$

$\cancel{-2-1-1}$ $\quad -2,\underbrace{4\ldots44}_{2021} - 1,\underbrace{5\ldots55}_{2020}6 = -4$

Значит, $(a+b)^3 = (-4)^3 = -64$.

Проверим условие: $a \neq b$: $-2,\underbrace{4\ldots44}_{2021} \neq -1,\underbrace{5\ldots55}_{2020}6$ верное

$a \neq -b$: $-2,\underbrace{4\ldots44}_{2021} \neq 1,\underbrace{5\ldots55}_{2020}6$ верное

Место для скобы

Шифр 004534

Продолжение задачи №1.

$a^2 - ab + b^2 \neq 0$

Допустим противное, что $a^2 - ab + b^2 = 0$, верное,

тогда $D = b^2 - 4ac = b^2 - 4b^2 = -3b^2 < 0$, т.к. $b^2 \geq 0$ при любых b,

значит, уравнение не имеет корней, значит, предположение неверно,

а значит, $a^2 - ab + b^2 = 0$ верное.

Ответ: -64

Задача №2.

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2yz = 625 \\ 2xy - z^2 = 625 \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 + 2y^2 - 2yz) - (2xy - z^2) = 625 - 625 \ (1) \\ x^2 + 2y^2 - 2yz = 625 \ (2) \end{cases}$$

$$(1)\ (x^2 + 2y^2 - 2yz) - (2xy - z^2) = 625 - 625$$

$$x^2 + y^2 + y^2 - 2yz - 2xy + z^2 = 0$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) = 0$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 = 0$$

Т.к. $(x-y)^2 \geq 0$, $(y-z)^2 \geq 0$ при любых допустимых x, y, z,

то $(x-y)^2 + (y-z)^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$,

значит, $x = y = z$ по свойству транзитивности.

Тогда $\overset{(2)}{x^2 + 2y^2 - 2yz = 625} \longrightarrow x^2 + 2x^2 - 2x^2 = 625$

$$3x^2 - 2x^2 = 625$$

$$x^2 = 625$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 25 \\ x = -25 \end{array}\right.$$

Уравнение имеет 2 корня, и $x = y = z$ по доказанному, значит системе уравнений удовлетворяют две тройки чисел –

$(25; 25; 25)$ и $(-25; -25; -25)$

Ответ: $(25; 25; 25)$; $(-25; -25; -25)$

Место для скобы

Шифр 004534

Задача №3

$y = x^2 + ax + b$ и $y = x^2 + cx + d$ есть общая точка $(1;1)$.

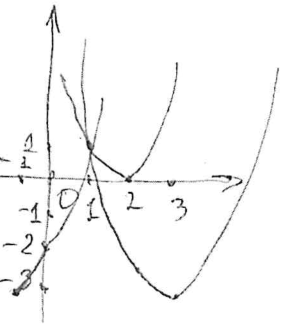
Подставим её координаты в уравнение

$1 = 1 + a + b$ $\qquad$ $1 = 1 + c + d$

$a + b = 0$ $\qquad$ $c + d = 0$

$a = -b$ $\qquad$ $c = -d$

То есть, все графики парабол, проходящие через точку $(1;1)$, удовлетворяют условию $(ax^2+bx+c) \longrightarrow b = -c$, но только те у которых старший коэффициент равен 1.



Например, графики проходящие через $(1;1)$

$y = x^2$ $(b = 0, c = 0, b \neq -c)$

$y = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ $(b = -c)$

$y = (x-3)^2 - 3 = x^2 - 6x + 9 - 3 = x^2 - 6x + 6$ $(b = -c)$

$c^{2022} - b^{2021} < a^{2021} + d^{2022}$, значит, в этом неравенстве можно заменить c на $(-d)$ и a на $(-b)$.

1) $(-d)^{2022} - b^{2021} < (-b)^{2021} + d^{2022}$

$(-d)^{2022}$ — показатель степени чётный, значит, $(-d)^{2022} = d^{2022}$

$(-b)^{2021}$ — показатель степени нечётный, значит, $(-b)^{2021} = -b^{2021}$

2) $d^{2022} - b^{2021} < -b^{2021} + d^{2022}$ равенство неверное, значит, и $c^{2022} - b^{2021} < a^{2021} + d^{2022}$ неверное при доказанных условиях.

Знаит, такого быть не могло.

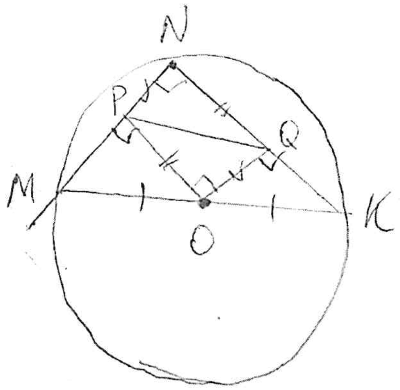
Ответ: нет

Место для скобы

Шифр

Задача №5.

Рассмотрим случай, когда $\triangle MNK$ – прямоугольный (т.е. $\angle MNK = 90^\circ$, и ~~О~~ – центр MK).



1) Тогда $\angle MOK = 180^\circ$ – развернутый, значит, $\angle POQ = \frac{180}{2} = 90^\circ$ по условию.

Значит, $\angle MOP + \angle QOK = 90^\circ$

2) $\angle NMK + \angle NKM = 90^\circ$ по свойству прямоугольного треугольника MNK.

Значит, $\angle MPO = 90^\circ$ $\angle OQK = 90^\circ$

т.к. $\angle MPO = \cancel{\angle PMO} \; 180 - \angle MPO - \angle POM$,

$\angle OQK = 180^\circ - \angle QOK - \angle QKO$

Значит, $\angle OPN = \cancel{180} \angle MPN - \angle MPO = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Аналогично, $\angle OQN = 90^\circ$.

Значит, $OQNP$ – прямоугольник по признаку

$MK < MP + PO + OQ + QK$ по неравенству $\triangle MPO$ и $\triangle OQK$.

$PQ < PN + NQ$

$PQ < MN - \overset{MP}{\cancel{PN}} + NK - QK$

Значит, $PQ < MP + QK$

Значит, $PQ + PN + NQ < \underline{MP + QK + PO + QO}$ MK

Значит, это возможно, $P(PNQ) < MK$ ~~, значит~~

~~От~~вета, возможно.