ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

07006

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

Шифр

ет	МАТЕМАТИКА
нт	1
	11
ия	ХАРИТОНОВА
	АНАСТАСИЯ
во	АНАТОЛЬЕВНА
ождения	05 (Число) 08 (Месяц) 2005 (Год)
(пр: Томская обл., …градская область)	Республика Саха (Якутия)
…иципального образования …, деревня, село, город)	город
…нный пункт (пр: Томск, …во, Псков)	Якутск
… наименование …зательного учреждения, …ом Вы обучаетесь в … время	МОБУ Якутский городской лицей

…сие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail …ультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Место для скобы

Шифр 07006

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
14		Емельянова	Ему

1	2	3	4	5	Σ
3	3	3	2	3	14

1. $2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$

$$\cancel{(x+z)^2+x^2+7y^2-42y+33=0}$$
$$\cancel{(x+z)^2+7y(y-6)+x^2+33=0}$$

$7y^2-42y+2x^2+2x^2z^2+z^2+33=0.$

Решим уравнение относительно y

$D=42^2-4\cdot7(2x^2+2x^2z^2+z^2+33)=1764-28(2x^2z^2+z^2+33+x^2)=$
$=1764-56x^2z^2-28z^2-924-28x^2=840-56x^2z^2-28z^2-28x^2=28(30-2x^2z^2-2x^2-z^2)$

$$y_1=\frac{42-\sqrt{28(30-2x^2z^2-2x^2-z^2)}}{14}=\frac{21-\sqrt{7(30-2x^2z^2-2x^2-z^2)}}{7}$$

$$y_2=\frac{42+\sqrt{28(30-2x^2z^2-2x^2-z^2)}}{14}=\frac{21+\sqrt{7(30-2x^2z^2-2x^2-z^2)}}{7}$$

$2x^2+2xz-2xz+z^2+2x^2z^2+7y^2-42y+33=0$

$(x+z)^2+2xz(xz-1)+x^2+7y(y-6)+33=0.$

$(x+z)^2+\underbrace{x(2z^2x-2z+x)}_{1}+\underbrace{7y^2-42y+33}_{2}=0.$

$\cancel{1\quad D=4-4\cdot2\cdot x^2=4-8x^2=4(1-2x^2)}$

$\cancel{1\quad 2x^2z^2-2xz+x^2=x^2(2z^2+1)-2xz}$

1 относительно z

Место для скобы

Шифр 07006

1, (1) $D = 4 - 4 \cdot 2x \cdot x = 4 - 8x^2$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8x^2}}{4x}$$

$$z_1 = \frac{2 - 2\sqrt{1 - 2x^2}}{4x} = \frac{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}{2x}$$

$$z_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2x^2}}{2x}$$

(2) Относительно y

$$D = 1764 - 4 \cdot 7 \cdot 33 = \cancel{21 \cdot (21 \cdot 4 - 4 \cdot 33) = 48 (21 - 33)}$$
$$= 840$$

$$y_{1,2} = \frac{42 \pm \sqrt{840}}{14} \Rightarrow \frac{42 - 2\sqrt{210}}{14} = \frac{21 - \sqrt{210}}{7} = y_1$$

$$y_2 = \frac{21 \pm \sqrt{210}}{7}$$

? откуда взялись? хоть проверку бы сделали

Отв: $(x; y; z) = (0; -1; 2)$

4. $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1 \quad (1)$

$$ax^3 - ax^2 + bx + b = ax^2(x-1) + b(x+1)$$

$$1 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} + 1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_3} + 1 + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + 1 = 0$$

$$\cancel{\frac{x_2 x_1^2 x_3 + x_2^2 \cdot x_1 x_3}{x_1 x_2 x_3} = -4}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{x_3} + \frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} = -4 \ ?$$

$$\frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_3 x_2 (x_2 + x_3) + x_3 x_1 (x_1 + x_3)}{x_1 x_2 x_3} = -4$$

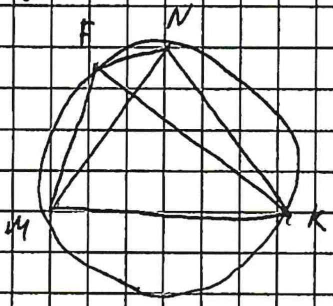
$$\frac{x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 \cdot x_2 + x_1^2 \cdot x_3 + x_3^2 x_1}{x_1 x_2 x_3} = -4$$

1

Место для скобы

Шифр 07006

5.



$\triangle MNK$ - равносторон

Решение:

Проведем FN, FK, FM

По Теореме Птолемея для четырехугольника FNKM

$\Rightarrow FK \cdot MN = FN \cdot MK + MF \cdot NK$, т.к ($MN = NK = MK$) по усл, то

$FK = FN + MF$

получится cos их предыдущее равенство

$\Rightarrow$ Откуда при возведении в любую степень будет справедливым, вне зависимости от выбора т.F на окружности. Т.е теорема Птолемея справедлива для любого четырехугольника вписанного в окружность. При любых других случаях будет образовываться четырехугольник MFNK $\#$

2. $2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{x^2-2022} = 0$

$2^{\lg(x^2-2023)} = \lg 2^{x^2-2022}$

$2^{\frac{\lg x^2}{\lg 2023}} = (x^2-2022)\lg 2$

Ограничения

$\begin{cases} x^2-2023 \neq 1 \\ x^2-2023 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \neq 2024 \\ x^2 > 2023 \end{cases}$

Прологарифмируем:

$\lg 2^{\lg(x^2-2023)} = \lg((x^2-2022)\lg 2)$

$\lg(x^2-2023)\cdot\lg 2 = \lg((x^2-2022)\lg 2)$

$\lg(x^2-2021) = \lg(x^2-2022\cdot\lg 2)$

$x^2-2021 = (x^2-2022)\lg 2$

Пусть $x^2-2021 = t$, тогда $x^2-2022 = t-1$

$\Rightarrow t = (t-1)\lg 2.$

Место для скобы

Шифр 700 6

2. $t = \lg 2 \cdot t - \lg 2$.

$t(1 - \lg 2) = -\lg 2$.

$t(\lg 2 - 1) = \lg 2$.

$t = \dfrac{\lg 2}{\lg 2 - 1}$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2021 = \dfrac{\lg 2}{\lg 2 - 1}$

$x^2 = \dfrac{\lg 2}{\lg 2 - 1} + 2021$

$x = \pm \sqrt{\dfrac{\lg 2}{\lg 2 - 1} + 2021}$

Отв: 2 корня.

3. $\dfrac{2a}{3(b+c)} + \dfrac{2b}{3(a+c)} + \dfrac{2c}{3(a+b)} \geq 1.$ $\quad \begin{cases} a+b \neq 0 \\ a+c \neq 0 \\ b+c \neq 0 \end{cases}$

$\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b}\right) \geq 1$

$\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{a+c} + \dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}.$

$\dfrac{a(a+b)(a+c) + b(b+c)(a+b) + c(b+c)(a+c)}{(b+c)(a+c)(a+b)} \geq \dfrac{3}{2}.$

Обозначим это выражение

$\dfrac{((a+c)(a^2+ba+c^2+bc) + b(b+c)(a+b))}{(b+c)(a+c)(a+b)} \geq \dfrac{3}{2}.$

$\lozenge$ $\dfrac{a^3+b^3+c^3+3abc+a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)}{a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)+2abc} \geq \dfrac{3}{2}.$

$\lozenge \geq \dfrac{3}{2}a^2(b+c) + \dfrac{3}{2}b^2(a+c) + \dfrac{3}{2}c^2(a+b) + 3abc.$

$a^3+b^3+c^3 \geq \dfrac{a^2(b+c)}{2} + \dfrac{b^2(a+c)}{2} + \dfrac{c^2(a+b)}{2}$

$2(a^3+b^3+c^3) \geq a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) \quad (1)$

3. Каждый член из a, b и c, либо в квадрате, либо в кубе, что говорит $a, b, c \geq 0$

и равенство выполнимо.