04490

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Г О Р Д И Е Н Я
	Имя	М А К С И М
	Отчество	И Л Ь И Ч
5.	Дата рождения	21 (число) 05 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Московская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Щёлково
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ Лицей №14

1	2	3	4	5	Σ
3	6	–	5	4	18

Место для скобы

Шифр 004490

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

Задача №2.

$\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\cdot\sin^9(2x)=\cos(4x)+\cos^5(4x)+2020\cos^9(4x)$

Произведём замену: пусть $\sin(2x)=a$ и $\cos(4x)=b$

Тогда получим =>

$a+a^5+2020a^9=b+b^5+2020b^9$

Докажем, что функция возрастающая: рассмотрим аналогичную функцию, $f(t)$, например.

$f(t)=t+t^5+2020t^9$, возьмём производную

$f'(t)=1+4t^4+2020\cdot 9t^8$. Видим, что $f'(t)>0$ при любых → → t => функция возрастающая. Знагит, наши функции $f(a)$ и $f(b)$ также возрастающие.

$f(a)=f(b)$

$a=b$

$\sin 2x=\cos 4x$

$\sin 2x=1-2\sin^2 2x$

Замена: пусть $\sin 2x=t$ =>

$2t^2+t-1=0$

$D=1-4\cdot 2\cdot(-1)=9=3^2$

$t_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}$ => $t_1=-1$ $t_2=\frac{1}{2}$.

Обратная замена

$\sin 2x=-1$

$2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ $|:2$.

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

$\sin 2x=\frac{1}{2}$

$2x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$ $|:2$

$x=\frac{\pi}{12}+\pi k, k\in Z$.

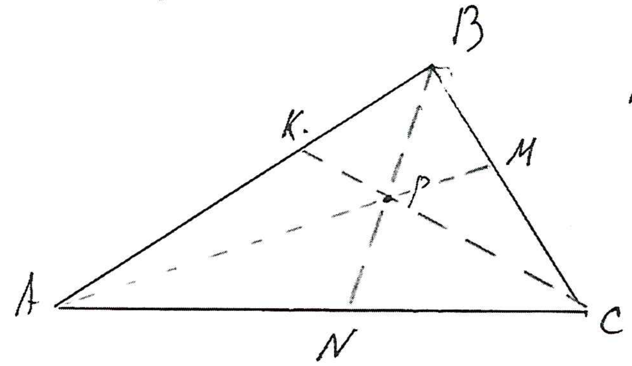
потерян корень $\frac{5\pi}{12}+\pi k$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; $x=\frac{\pi}{12}+\pi k, k\in Z$.

Место для скобы

Шифр 004490

Задача №5.

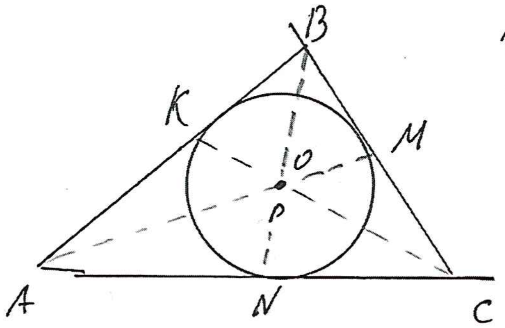


Дан произвольный $\triangle ABC$ на плоскости. В нём отмечена точка P. Точки M, N, K – являются ортогональными проекциями точки P на прямые BC, AC, AB.

Необходимо найти все точки P, для которых сумма $\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}$ – минимальна.

Решение:

Внимательно посмотрев на сумму, понимаем, что сумма будет тем меньше, чем знаменатель каждой дроби больше. Значит, расстояние от вершины $\triangle ABC$ до т. $P \to max$.



Предположим, что т. P – центр вписанной окружности. (Т. пересечения биссектрис.) Сумма будет минимальна в случае, когда $KP = PM = PN = R$

Однако, если перемещать точку P по площади окружности, сумма также будет минимальна, т.к. ~~бу~~ будут пропорционально менятся длины KP, PM, PN.

Если сказать, что ц. окр – это координата O, то сумма будет минимальна при условии, точка P лежит в окружности. $\Rightarrow OP < R$, где O-центр окружности.

Ответ: $OP < R$.

Место для скобы

Шифр 004490

Задача №1.

Вопрос: существует ли такой "x" при котором числа

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$; — целые?

Решение.

Предположим, что все три числа равны нулю. ??

Рассмотрим второе число.

$x-\frac{1}{x}=0$

$x=\frac{1}{x}$

$x^2=1$

$x=\pm 1$. — при данных значениях x — число целое. (пока только второе).

Рассмотрим первое и третье числа. Они похожи друг на друга таким образом:

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=0 \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{x^2+2021}$

$\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}=0 \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{x^2+2021}$

$\Rightarrow x^2+2021=x$

$x^2-x+2021=0$

$D=b^2-4ac<0$ — нет корней

~~x - может быть любым.~~

Также, ± 1 не подходит для первого и третьего числа.

Получается, что нет такого значения "x" при котором бы сразу три числа были целыми.

Ответ: не существует.

Место для скобы

Шифр

Задача №4.

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}, \quad m>0 - ?$$

Произведём замену: пусть $x^3=a$ и $x\cdot\sqrt[3]{2020^4}=b$.

Тогда получим =>

$$\frac{a}{m+b}+\frac{m}{a+b}+\frac{b}{a+m} \le \frac{3}{2}.$$

Применяем нер-ва о средних несколько раз.

?

как?

$$\frac{a}{m+b}+\frac{m}{a+b}+\frac{b}{a+m} \ge 3\sqrt[3]{\frac{amb}{(m+b)(a+b)(a+m)}} \ge$$

обоснование недостаточное?

$$\ge 3\sqrt[3]{\frac{abm}{2\sqrt{mb}\cdot 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{am}}} = 3\sqrt[3]{\frac{abm}{8abm}} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \text{получили} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{m+b}+\frac{m}{a+b}+\frac{b}{a+m} \ge \frac{3}{2}. \quad \left(\text{При всех } \begin{matrix} a>0 \\ b>0 \\ m>0. \end{matrix}\right)$$

Равенство возможно тогда при условии, что

$$\frac{a}{m+b}+\frac{m}{a+b}+\frac{b}{a+m}=\frac{1}{2}$$ — Приведём к общему знаменателю и преобразуем.

Получим, что $a=b=m$.

Обратная замена => $x^3 = x\sqrt[3]{2020^4}=m$, откуда

$x^3=\sqrt[3]{2020^4} \Rightarrow x=\sqrt[3]{2020^4}$

$m=2020^2$

Ответ: $m=2020^2$