ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004531

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы											
2.	Вариант	Математика 9 класс Вариант 3 закл											
3.	Класс	9											
4.	Фамилия	Г	О	Р	Д	И	Е	Н	К	О			
	Имя	Н	И	К	И	Т	А						
	Отчество	П	А	В	Л	О	В	И	Ч				
5.	Дата рождения	26 (число)	09 (месяц)	2020 (год)									
6.	Страна	Россия											
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл											
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город											
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Ростов-на-Дону											
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ "Лицей 27" имени А.В. Суворова											

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	7	–	28

Задача 1. лист 1

004531

$$\frac{2(ab^4+a^4b)}{a^2-ab+b^2} - \frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2} = \frac{2ab(a^3+b^3)}{a^2-ab+b^2} - \frac{(a^2+b^2)\cancel{(b^2-a^2)}(b+a)}{\cancel{a^2-b^2}}$$

$$= \cancel{\frac{2ab(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2} + (a^2+b^2)(a+b)}$$

$$= \frac{2ab(a+b)\cancel{(a^2+b^2-ab)}}{\cancel{a^2-ab+b^2}} + (a^2+b^2)(a+b) = (a+b)2ab + (a^2+b^2)(a+b) =$$

$$= (a+b)(a^2+b^2+2ab) = (a+b)^3$$

Заметим, что:

$$a+b = -2,\underbrace{4\ldots4}_{2021} - 1,\underbrace{5\ldots5}_{2020}6 =$$

$$= \begin{array}{r} -2,4\ldots\ldots4 \\ -\underline{1,5\ldots\ldots6} \\ -4,00\ldots\ldots0 \end{array}, \Rightarrow a+b=-4$$

Тогда $(a+b)^3 = (-4)^3 = -64$

Ответ: -64.

Задача 2. Лист 2.

004531

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2yz=625; \\ 2xy-z^2=625. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$x^2+2y^2-2yz-2xy+z^2=0.$$

$$x^2+y^2-2xy+y^2+z^2-2yz=0$$

$$(x-y)^2+(y-z)^2=0$$

$$(x-y)^2=0 \qquad (y-z)^2=0$$

$$x-y=0 \qquad y-z=0$$

$$x=y \iff y=z,$$

$$\Rightarrow x=y=z.$$

Тогда по условию системы! (2-е равенство)

$$2x\cdot x-x^2=625$$

$$x^2=625$$

$$x=\pm 625, \Rightarrow x,y,z=$$

$$=(25;25;25);\ (-25;-25;-25)$$

Ответ: $x=y=z=25$; $x=y=z=-25$

Задача. 3.

004531 Лист 3.

$y = x^2 + ax + b$

$y = x^2 + cx + d$. пересек в т. $(1;1)$, $\Rightarrow$ эта т. принадлежит обеим функциям, $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+\cancel{1}=\cancel{1} \\ c+d+\cancel{1}=\cancel{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-b \\ c=-d. \end{matrix}$$

Подставим эти значения в исходное выражение:

$c^{2022} - b^{2021} \;\dots\; (-b)^{2021} + (-c)^{2022}$.

$(-c)^{2022}$: ст. четная, $\Rightarrow (-c)^{2022} = c^{2021}$.

$(-b)^{2021}$: ст. нечётная, $\Rightarrow (-b)^{2021} = -b^{2021}$

Тогда.

$c^{2022} - b^{2021} = -b^{2021} + c^{2022}$ — эти выражения равны

$c^{2022} - b^{2021} < a^{2021} + d^{2022}$ быть не может

Ответ: нет.

Задача 4.

Докажем вспомогательное неравенство $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$:

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$. $(\cdot 2)$

$(a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)-2ab-2ab-2ac \geq 0$.

$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geq 0$ – верно при любых a, b и c.

Применим его к доказательству исходного неравенства:

$a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab$. (1)

$(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab$. – применим к левой части неравенства:

$(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2 \geq (ab)^2+(bc)^2+(ac)^2$. (2)

Применим его еще раз для правой части неравенства (1):

$(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2 \geq ab\cdot bc+ab\cdot ac+bc\cdot ac = ab^2c+a^2bc+c^2ab$

– левая часть исходного неравенства. Тогда получаем, что

$(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2 \geq ab\cdot bc+ab\cdot ac+bc\cdot ac = a^2bc+b^2ac+c^2ab$ – доказано.

(получаем это из пунктов 1 и 2)