Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

003516

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	математика
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Головнина
	Имя	Елена
	Отчество	Викторовна
5.	Дата рождения	Число: 15; Месяц: 07; Год: 2003
6.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Томская область
7.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	село
8.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Асино)*	Бакчар
9.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	Муниципальное Бюджетное Общеобразовательное Учреждение „Бакчарская Средняя Общеобразовательная Школа“

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________________

Место для скобы

Шифр 003516

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
26 б	3.04.21	Гендрико И.Ю.	

№2. $\sin x + \sin^3 x + 2020 \cdot \sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2020 \cdot \cos^5(2x)$,

В нашем уравнении степени $\sin x$ и $\cos(2x)$ являются нечётными, следовательно, эти слагаемые равны;

Значит $\sin x = \cos(2x)$; преобразуем уравнение:

$\sin x = 1 - 2\sin^2 x$,

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$,

7 б

Сделаем замену: $\sin x = a$, $|a| = 1$

$2a^2 + a - 1 = 0$, Найдём корни уравнения с помощью дискриминанта:

$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9\ (3^2)$,

$a_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$,

$a_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$,

$a_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

Обратная замена (=Возврат):

1) $\sin x = -1$

$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

2) $\sin x = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

или

$x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ ✓

$x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. ✓

1	2	3	4	5
7	7	5	4	3

Место для скобы

Шифр 003516

№3. $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, $n>1$

n – целое число

Допустим, $n=2$, тогда

$f(x)=x^2+5x^{2-1}+3$,

$f(x)=x^2+5x+3$,

найдём корни с помощью дискриминанта:

$D=b^2-4ac=(5)^2-4\cdot1\cdot3=25-12=13$ $(\sqrt{13})$,

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$,

$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$ $\Rightarrow$ $x^2+5x+3=\left(x-\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$,

То есть, если $n>2$, то корни ищем среди делителей числа 3: ±1; ±3

5б

Не все коэф-ты целые!

Если $x=1$, то $(x^n+5x^{n-1}+3):(x-1)$,

Проделаем вычисления столбиком:

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n-1}+3 & x-1 \\ \hline -\;x^n-x^{n-1} & x^{n-1}+6x^{n-2}+6x^{n-3} \\ \quad 6x^{n-1}+3 & \\ -\;6x^{n-1}-6x^{n-2} & \\ \quad 6x^{n-2}+3 & \\ -\;6x^{n-2}-6x^{n-3} & \\ \quad 6x^{n-3}+3\ldots & \end{array}$$

$6\neq3\Rightarrow$ $x=1$ – не является корнем

Если $x=-1$, то $(x^n+5x^{n-1}+3):(x+1)\Rightarrow$

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n-1}+3 & x+1 \\ \hline -\;x^n+x^{n-1} & x^{n-1}+4x^{n-1}-4x^{n-3}+4x^{n-4} \\ \quad 4x^{n-1}+3 & \\ -\;4x^{n-1}+4x^{n-2} & \\ \quad -4x^{n-2}+3 & \\ -\;4x^{n-2}-4x^{n-3} & \\ \quad -4x^{n-3}+3 & \\ \quad 4x^{n-3}+4x^{n-3} & \\ \quad \ldots\ldots -4x^{n-4}+3 & \end{array}$$

$x=-1$ тоже не будет являться корнем, так как числовой коэффициент $\neq3$.

Место для скобы

Шифр 003516

Если $n=3$, то $(x^n+5x^{n-1}+3):(x-3)$

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n-1}+3 & x+3 \\ -\ x^n-3x^{n-1} & x^{n-1}+8x^{n-2}+24x^{n-3} \\ \hline \quad 8x^{n-1}+3 & \\ -\ 8x^{n-1}-24^{n-2} & \\ \hline \quad 24x^{n-2}+3 & \\ -\ 24x^{n-2}-72x^{n-3} & \\ \hline \quad -72x^{n-4}+3 \ \ldots & \end{array}$$

модель числовых коэффициентов увеличивается $\Rightarrow$ деление нацело не произойдёт

подбираем дальше $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Если $x=-3$ $\Rightarrow$ $(x^n+5x^{n-1}+3):(x+3)$

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n-1}+3 & x+3 \\ -\ x^n+3x^{n-1} & x^{n-1}+2x^{n-2}-6x^{n-3}+18x^{n-4}\ldots \\ \hline \quad 2x^{n-1}+3 & \\ -\ 2x^{n-1}+6x^{n-2} & \\ \hline \quad -6x^{n-2}+3 & \\ \quad -6x^{n-2}-18x^{n-3} & \\ \hline \quad \ldots\ -54x^{n-4}+3 & \end{array}$$

модель числовых коэфф. увел-ся $\Rightarrow$ деление не нацело.

проделав сложные вычисления, мы поняли, что $f(x)$ в виде произведения при $n>2$ разложить нельзя, можно только при $n=2$. Ответ: $n=2$.

7б

№1. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$, $x-\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

нам нужно узнать - существует ли такое число x, что все три числа являются целыми.

$x\neq0$

Допустим:

Если $x=1$, то $x-\frac{1}{x}=0$ - целое, а $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ - нет, значит и $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$ тоже нет, так как оно противопоставленное.

Место для скобы

Если $x \neq 1$ **Шифр**

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} = \frac{x^2 - x + 2021}{x(x^2+2021)}$ — рассмотрим этот квадратный трёхчлен, найдём его корни и разложим на множители; для этого воспользуемся формулой дискриминанта:

$D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2021 = 1 - 8084 = -8083 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Разложить на множители нельзя, сократить тоже нельзя

$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ - не целое.

Значит нет такого числа x, при котором все три числа будут являться целыми.

№4. $\frac{x^3}{a + \sqrt[3]{2020^4} \cdot x} + \frac{\sqrt[3]{2020^4} \cdot x}{a + x^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{a}{x \cdot (x^2 + \sqrt[3]{2020^4})}$,

Сделаем замену: $x^3 = b$, $\sqrt[3]{2020^4} \cdot x = a$,

$$\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} \leq \frac{3}{2},$$

Приведём к общему знаменателю:

$$\frac{b(a+b)(b+c) + c(a+c)(b+c) + a(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)(b+c)} \leq \frac{3}{2},$$

4б

$$\frac{b(ab + ac + b^2 + bc) + c(ab + ac + cb + c^2) + a(a^2 + ab + ac + cb)}{(a+c)(a+b)(b+c)},$$

$$\frac{ab^2 + abc + b^3 + b^2c + abc + ac^2 + c^2b + c^3 + a^3 + a^2b + a^2c + acb}{(a+c)(a+b)(b+c)},$$

приведём подобные и получим:

Место для скобы

$$\frac{a^3+b^3+c^3+ab^2+3abc+b^2c+ac^2+c^2b+a^2b+a^2c}{(a+c)(a+b)(b+c)} \le \frac{3}{2}$$ **Шифр**

↑ Это нужно доказать!

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \le \frac{3}{2}$$?

$$\frac{3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2(a+b+c)} \le \frac{3}{2}$$ – вот, что мы получили.

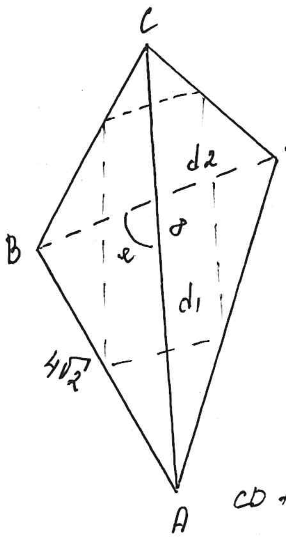
ч.т.д.

№5.

Дано:
ABCD - выпукл. четырёхугол.
$S_{ABCD} = 32$
сумма длин двух противопол. сторон и одной диагонали $= 16$

Какие значения может принимать длина другой диагонали?

Решение:



Пусть $AB = a$;
$CD = b$; $BD = d_2$
$AC = d_1$

Тогда:

1) Если ABCD – это квадрат, то площадь $S_{кв} = 32 \Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow$
$AC = 8$!
$CD + AB + AC = 8\sqrt{2} + 8 \neq 16 \Rightarrow$ ABCD – не является квадратом.

2) Площадь четырёхугол. $= 32 = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi \Rightarrow$

$d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi = 64.$

$S_{пар} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 16,$

$\Rightarrow d_2 < 16$

ч.т.д.

3б

~~Ответ неверный~~
Не получено точное значение (единственно возможное)