ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004492

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Г Л Е К О В
	Имя	М И Х А И Л
	Отчество	А Л Е К С А Н Д Р О В И Ч
5.	Дата рождения	05 (число) 01 (месяц) 2004 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Ростов-на-Дону
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ лицей №33

1	2	3	4	5	Σ
5	7	3	6	6	27

Ему

004492

Чистовик. Лист 1

Задание 2.

$\sin(2x) + \sin^5(2x) + 2020\sin^9(2x) = \cos(4x) + \cos^5(4x) + 2020\cos^9(4x)$

пусть $\sin 2x = k$ и $\cos 4x = p$

пусть $f(x) = \sin(2x) + \sin^5(2x) + 2020\sin^9(2x) \Rightarrow$

$f(k) = k + k^5 + 2020k^9$

$f'(k) = 1 + 5k^4 + 9\cdot 2020k^8$

k^4 и $k^8 \Rightarrow$ всегда $\geq 0 \Rightarrow$

ф-я $f(k)$ – моном. возраст.

Пусть $f(x) = \cos(4x) + \cos^5(4x) + 2020\cos^9(4x) \Rightarrow$

$f(p) = p + p^5 + 2020p^9$

$f'(p) = 1 + 5p^4 + 9\cdot 2020p^8$

p^4 и p^8 всегда $\geq 0 \Rightarrow$

ф-я $f(p)$ – монот. возраст.

$\Rightarrow$ $f(k) = f(p)$ тогда и только тогда, когда

$k = p \Rightarrow \sin 2x = \cos 4x$

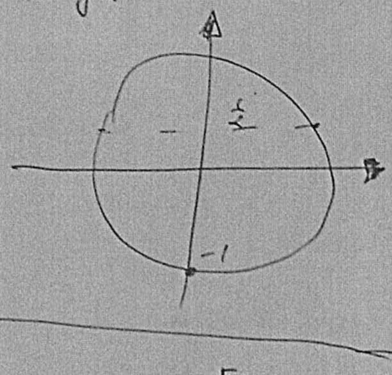
$\Updownarrow$

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

$\Rightarrow 2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$

пусть $\sin 2x = t \Rightarrow$

$2t^2 + t - 1 = 0$



$\Rightarrow \begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(2x) = -1 \\ \sin(2x) = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \pi n$, $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi l$; $k, n, l \in \mathbb{Z}$

Шемович. Лист 2. 004492

Задание 3.

$p(t) = t^n + 5^{n-1} + 3$, ~~$n \geq 0$,~~ $n > 1$, $n \in \mathbb{Z}$;

по теор. Виета для n-ой степени:

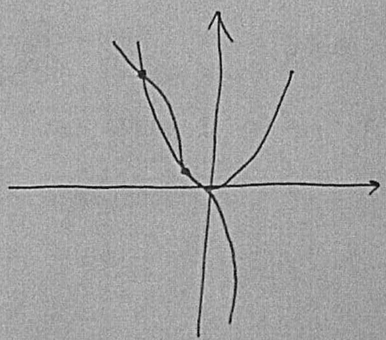
$$\begin{cases} t_1 + t_2 + \ldots + t_n = -5 \\ t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n = 3 \end{cases}$$

t_i – корни, $i \in [1; n] \in \mathbb{Z}$

$t^n + 5t^{n-1} + 3 = 0 \Rightarrow$

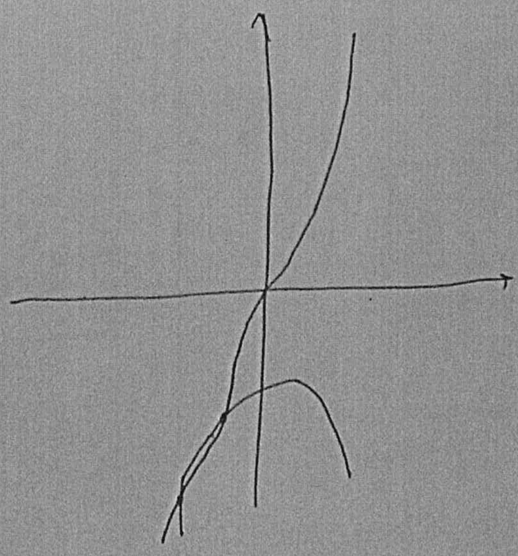
$$\underbrace{t^n}_{y_1} = \underbrace{-5t^{n-1} - 3}_{y_2}$$

1) пусть $n = 2k$ (чётн)



$\Rightarrow$ не более 2-х отриц. корней

2) при $n = 2k - 1$



не более 2-х отриц. корней

$\Rightarrow$ см. след. лист

Чистовик. Лист 3 004492

Задание 3 (продолж)

т.к. по теор. Виета кол-во отриц. корней чётно

т.к. $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot \ldots \cdot t_m = 3$

$\Rightarrow$ 2 отриц. корня

$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = -5 \\ t_1 \cdot t_2 = 3 \end{cases}$ ур-е $t^2 + 5t + 3 = 0$ имеет такие же решения:

$D = 25 - 3 \cdot 4 = 13$

$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$; $\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} < 0$

$\frac{-5+\sqrt{13}}{2} \lessgtr 0$ $\quad -5 \lessgtr -\sqrt{13}$ $\quad 5 \gtrless \sqrt{13}$ $\quad 25 \gtrless 13$

$\Rightarrow t_{1,2} < 0$

$$\begin{array}{l|l} t^n + 5t^{n-1} + 3 & t^2+5t+3 \\ \underline{t^n + 5t^{n-1} + 3t^{n-2}} & t^{n-2} + 3t^{n-4} + \ldots + 1 \\ \quad -3t^{n-2} + 0 & \\ \quad \underline{-3t^{n-2} - 15t^{n-3}} & \\ \quad\quad \ldots & \end{array}$$

$\Rightarrow$ из многочлена $p(t)$ можно выделить множитель

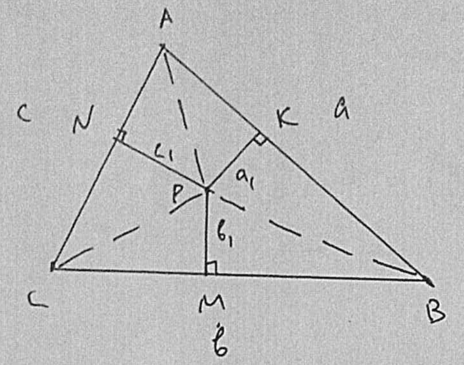
$f(t) = t^2 + 5t + 3 \Rightarrow$

второй множит. $g(t) = \left(t^{n-2} + (-3)t^{n-4} + \ldots + 1\right)$

$\Rightarrow$ Ответ: Да, можно

Черновик. Лист 4.

Задание 5.



Найти: все (.) P – ? для которых $\left(\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}\right)$ – min

Решение:

~~$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APC} + S_{\triangle APB} + S_{\triangle CPB} =$~~

$= \cancel{\frac{1}{2}ah}$. Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CA = c$,

а $PK = a_1$, $PM = b_1$, $PN = c_1$ $\Rightarrow \left(\frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1} + \frac{c}{c_1}\right)$ – min

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APC} + S_{\triangle CPB} + S_{\triangle APB} =$

$= \frac{1}{2} a \cdot a_1 + \frac{1}{2} b \cdot b_1 + \frac{1}{2} c \cdot c_1 \Rightarrow$

$2 S_{\triangle ABC} = a \cdot a_1 + b \cdot b_1 + c \cdot c_1$;

домножим обе части ур-я на нашу $\Sigma \Rightarrow$

$\left(\frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1} + \frac{c}{c_1}\right) 2 S_{\triangle ABC} = \left(\frac{a}{a_1} + \frac{b}{b_1} + \frac{c}{c_1}\right) \cdot (aa_1 + bb_1 + cc_1) =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + \frac{abb_1}{a_1} + \frac{acc_1}{a_1} + \frac{baa_1}{b_1} + \frac{bcc_1}{b_1} + \frac{caa_1}{c_1} + \frac{cbb_1}{c_1} =$

$= a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{a_1}{b_1}\right) + ac\left(\frac{c_1}{a_1} + \frac{a_1}{c_1}\right) + bc\left(\frac{b_1}{c_1} + \frac{c_1}{b_1}\right)$;

$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{b_1}{a_1}$ – взаимно простые числа $\Rightarrow$ по нер-ву

о средних: $\frac{b_1}{a_1} + \frac{a_1}{b_1} \geq 2$

Также для $\frac{b_1}{c_1} + \frac{c_1}{b_1} \geq 2$

и $\frac{a_1}{c_1} + \frac{c_1}{a_1} \geq 2$ $\Rightarrow$ см. сл. лист.

Чистовик. Лист 5.

Задание 5 (продолж)

$\Rightarrow \; a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{a_1}{b_1}\right)+ac\left(\frac{c_1}{a_1}+\frac{a_1}{c_1}\right)+bc\left(\frac{b_1}{c_1}+\frac{c_1}{b_1}\right)\geq$

$\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$\Downarrow$

Min. знач. в данном нер-ве достигается только при равенстве левой и правой частей (т.е. при равенстве слагаемых) $\Rightarrow a_1=b_1=c_1 \Rightarrow$

(.) P – центр впис. окр $\Rightarrow$

Ответ: 1 точка, и это центр впис. окр.

Чистовик. Лист 6.

Задание 1.

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$; $x - \frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$ $\in \mathbb{Z}$ - ?

рассм. число $x - \frac{1}{x}$

Очевидно, что при $x < 1$ ⇒

дробь $\frac{1}{x}$ будет принимать либо целое знач., либо дробное,

при этом при $x < 1$ x тоже будет дробным, ~~причем всегда~~

~~дата~~ $= \frac{1}{\frac{1}{x}}$ ⇒ при $x < 1$ число $(x - \frac{1}{x})$ ~~не будет~~ $\notin \mathbb{Z}$

при $x > 1$ ⇒ x - будет $\in \mathbb{Z}$ (при $x = \{1, 2, 3 \dots\}$)

но $\frac{1}{x}$ всегда будет дробным при любом $x > 1$ ⇒

при $x > 1$ число $(x - \frac{1}{x}) \notin \mathbb{Z}$

⇒ остаётся только $x = 1$ и $x = -1$

$1 - \frac{1}{1} = 0 \in \mathbb{Z}$ ⇒ проверим для других чисел:

сумма двух дробей может дать целое – это не учтено в рассуждениях

$\frac{1}{1} - \frac{1}{1^2+2021}$; 0 ; $\frac{1}{1^2+2021} - \frac{1}{1}$

⇒ $1 - \frac{1}{2022}$; 0 ; $\frac{1}{2022} - 1$

Заметим, что эта сумма $\notin \mathbb{Z}$ ⇒

Ответ: Нет, такого x не существует

Черновик. Лист 7.

Задание 4.

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\,x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x^3+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\,x}{m+x^3}\ ; \quad x>0,\ m>0$$

Пусть $\sqrt[3]{2020^4}\cdot x = t \Rightarrow t>0$

$$\frac{x^3}{m+t} + \frac{m}{x^3+t} + \frac{t}{m+x^3} \le \frac{3}{2}$$

Сумма и отнош. положит. чисел $>0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{\frac{x^3}{m+t} + \frac{m}{x^3+t} + \frac{t}{m+x^3}} \ge \frac{2}{3} \ \Big|\cdot 3$$

$$\frac{3}{\frac{x^3}{m+t} + \frac{m}{x^3+t} + \frac{t}{m+x^3}} \ge 2$$

$\Rightarrow$ по нер-ву о средних? $\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \frac{a+b+c}{3}$

рав-во достигается при $a=b=c \Rightarrow$

$$\frac{\frac{m+t}{x^3} + \frac{x^3+t}{m} + \frac{m+x^3}{t}}{3} \ge \underbrace{\frac{3}{\frac{x^3}{m+t} + \frac{m}{x^3+t} + \frac{t}{m+x^3}}}\ge 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{m+t}{x^3} + \frac{x^3+t}{m} + \frac{m+x^3}{t}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\Big(\underbrace{\frac{m}{x^3}+\frac{t}{x^3}}_{\ge 2} + \underbrace{\frac{x^3}{m}+\frac{t}{m}}_{\ge 2} + \underbrace{\frac{m}{t}+\frac{x^3}{t}}_{\ge 2}\Big) \ge 2 \Rightarrow \text{см. след. лист}$$

Чистовик. Лист 8

Задание 4 (продолж.)

$\Rightarrow$ Заметим, что оценка в последнем выполняется при таких же условиях, что и начальное нер-во

$\Rightarrow$ $\begin{cases} t = m \\ t = x^3 \\ m = x^3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x^3 = \sqrt[3]{2020^4} \cdot x$

$\Rightarrow$ т.к. $x > 0$ $\Rightarrow$ $x^2 = \sqrt[3]{2020^4}$

$\Rightarrow$ $x = \sqrt[3]{2020^2}$, > 0 $\Rightarrow$

$m = 2020^2$

Ответ: $m = 2020^2$