ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004494
Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Г А П Ч Е Н К О
	Имя	А Р Т У Р
	Отчество	С Е Р Г Е Е В И Ч
5.	Дата рождения	2 8 (число) 1 1 (месяц) 2 0 0 2 (год)
6.	Страна	Кыргызстан
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Бишкек
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Бишкек
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	УВК ШГ №38

1	2	3	4	5	Σ
4	6	3	4	3	20

Шифр 004494

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

Задача 1

Даны числа $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$. Рассмотрим число $x-\frac{1}{x}$; Рассмотрим когда оно яв-ся целым $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}$.

Число $x-\frac{1}{x}$ может быть целым, нулем в точках $x_{1,2}=\pm1$ ✓ а может, не только

$x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}=\left(1-\frac{1}{x}\right)(x+1)$, множитель $\left(1-\frac{1}{x}\right)$ - будет целым лишь в ? них?

при $x\in(0;1]$, $x\in[-1;0)$, а множитель $(x+1)$ - будет целым лишь при $x\in(-\infty;-1]$, $x\in[1;+\infty)$, $x=0$

Тогда когда число $\left(1-\frac{1}{x}\right)$ - целое, то множитель $(x+1)$ - не целый.

Их произведение становится целым лишь при $x_{1,2}=\pm1$

Тогда числа $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ и $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$ - не целые

$x=1$ $\frac{1}{1}-\frac{1}{1^2+2021}=1-\frac{1}{2022}=\frac{2021}{2022}$, $\frac{1}{1^2+2021}-\frac{1}{1}=\frac{1}{2022}-1=-\frac{2021}{2022}$.

То же самое и при $x=-1$. Только числа поменяются местами

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ будет равно: $-1-\frac{1}{1+2021}=-1-\frac{1}{2022}=-\frac{2023}{2022}$; а число

$-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+2021}$ станет положительным равным $\frac{2023}{2022}$. не обоснованно ?

Итак, т.к. число $x-\frac{1}{x}$ яв-ся целым лишь при $x_{1,2}=\pm1$, а числа $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ и $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$ при $x_{1,2}=\pm1$ не яв-ся целыми - то такого числа x при котором все 3 числа целые - не существует.

Ответ: такого x не существует.

Шифр 004494

Задача 2

$\sin(2x) + \sin^5(2x) + 2020\sin^9(2x) = \cos(4x) + \cos^5(4x) + 2020\cdot\cos^9(4x)$

$\sin(2x)(1+\sin^4(2x) + 2020\sin^8(2x)) = \cos(4x)(1+\cos^4(4x) + 2020\cos^8(4x))$

Т.к. правая часть ур-я и левая часть уравнения имеют схожий вид то решением уровнения исходного будет $\sin(2x) = \cos(4x)$. Преобразуем и решим ур-е.

$\sin(2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\sin(2x) = 1 - \sin^2 2x - \sin^2 2x$

$\sin(2x) = 1 - 2\sin^2 2x$

$2\sin^2 2x + \sin(2x) - 1 = 0$

Пусть $\sin(2x) = t$, $|t| \leq 1$, тогда

$2t^2 + t - 1 = 0$

$D = 1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 1+8 = 9 > 0$

$t_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm 3}{4}$; $t_1 = -1$

$t_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Вернемся к переменной x.

1) $\sin(2x) = -1$

$2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad |:2$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin(2x) = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 2x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad |:2 \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \quad |:2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Задача 3

Шифр 004494

Дано

$p(t)=t^n+5t^{n-1}+3$

$n>1$, n - целое число

Предположим что всё же можно разложить $p(t)$ на произведение многочленов положительной степени с целыми показателями.

$p(t)=(t^{x_1}+a)(t^{x_2}+b)\cdot\ldots\cdot(t^{x_k}+z)$, где $a, b, c \ldots x, y, z$ - целые коэффициенты. Самый простой случай рассмотрим, разложение на 2 множителя, след-но $k=2$, k - кол-во множителей

$$p(t)=(t^{x_1}+a)(t^{x_2}+b)=t^n+t^{x}(a+b)+ab$$

Где n и $\frac{n}{2}$ - могут быть любыми числами, даже равными. Мы смотрим главное на коэффициенты $(a+b)$ и ab. Т.к. $t^n+5t^{n-1}+3$, то $ab=3$ и $a+b=5$, но произведение $a\cdot b$ - это произведение целых чисел либо $(-1;-3)(1;3)$, в сумме никогда не будут 5.

В общем виде $p(t)=(t^{x_1}+a)(t^{x_2}+b)\cdot\ldots\cdot(t^{x_k}+z)$, где $x_1, x_2, x_3 \ldots x_k$ - [не имеет значения какие], тогда возможные степени

$a+b+c+\ldots+z=5$, $a\cdot b\cdot c\ldots z=3$.

При этом в произведении отрицательные коэффициенты $(1;-1;-3)$ или $(-1;-1;3)$.

Могут идти лишь попарно, т.е. на конкретные множители

Таким образом $p(t)$ можно разложить $p(t)=(x-3)(x-1)(x+1)^5$. При этом появляются

(*) $p(t)=(x-3)(x+1)(x+1)$ или $p(t)=\ldots$ (**)

лишние корни, при добавлении множителей

$p(t)=x^3+5x^2+7x+3$, где $\pm x$ лишние,

к (*) и (**) (множителей которые не меняют сумму и произведения) например $p(t)=(x+3)(x+1)(x+1)\underline{(x-1)(x-1)(x+1)(x+1)}$ ← добавочные части

и (**) $p(t)=(x-3)(x+1)^5(x-1)\underline{(x-1)(x-1)(x+1)(x+1)}$ ←

так и, которые лишь увеличат число лишних частей.

Ответ: невозможно.

Задание 4

Шифр

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\,x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\,x}{m+x^3}$$

Пусть $t=\sqrt[3]{2020^4}\,x$, тогда $x=\frac{t}{\sqrt[3]{2020^4}}$, подставим, т.к. $x>0$ то и $t>0$

$$\frac{t^3}{2020^4(m+t)} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{\frac{t^3}{2020^4}+t} - \frac{t}{m+\frac{t^3}{2020^4}}$$

$$\frac{t^3}{2020^4(m+t)} \le \frac{3}{2} - \frac{m\cdot 2020^4}{t^3+t\cdot 2020^4} - \frac{t\cdot 2020^4}{t^3+2020^4 m}$$

Перейдем к оценке, т.к. $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, то

$$\begin{cases} \frac{t^3}{2020^4(m+t)} \le \frac{1}{2} \\ \frac{m\cdot 2020^4}{t^3+2020^4 t} \le \frac{1}{2} \\ \frac{t\cdot 2020^4}{t^3+2020^4 m} \le \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^3 \le \frac{1}{2}\cdot 2020^4(m+t) & (1) \\ m\cdot 2020^4 \le \frac{1}{2}(t^3+2020^4 t) & (2) \\ t\cdot 2020^4 \le \frac{1}{2}(t^3+2020^4 m) & (3) \end{cases}$$

Вычтем из (2) ур-е 3

Получим ур-е $2020^4(m-t) \le \frac{1}{2}(2020^4(t-m)) \mid \cdot 2$

$$2m-2t \le t-m$$

$$3m \le 3t \Rightarrow m \le t$$

Максимальное значение при $m=t$, подставим

$$\frac{t^{3^2}}{2020^4\cdot 2t} \le \frac{3}{2} - \frac{2020^4 t}{t(t^2+2020^4)} - \frac{t\cdot 2020^4}{t(t^2+2020^4)}$$

$$\frac{t^2}{2\cdot 2020^4} + \frac{2020^4}{t^2+2020^4} + \frac{2020^4}{t^2+2020^4} \le \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{t^2}{2\cdot 2020^4} + \frac{2\cdot 2020^4}{t^2+2020^4} \le \frac{3}{2} \mid \cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t^4+t^2\cdot 2020^4+4\cdot 2020^8}{(t^2+2020^4)\cdot 2020^4} \le 3 \mid \cdot (t^2+2020^4)\cdot 2020^4$$

$$t^4+t^2\cdot 2020^4+4\cdot 2020^8 \le 3\cdot 2020^4 t^2+3\cdot 2020^8$$

$$t^4-2t^2\cdot 2020^4+2020^8 \le 0$$

$$(t^2-2020^4)^2 \le 0$$

Верно лишь при $t=2020^2$, $x=\frac{2020^2}{2020\sqrt[3]{2020}} = \frac{2020\sqrt[3]{2020^2}}{2020} = \sqrt[3]{2020^2}$

Следно $m\in(0;\sqrt[3]{2020^2}]$

Ответ: $m\in(0;\sqrt[3]{2020^2}]$

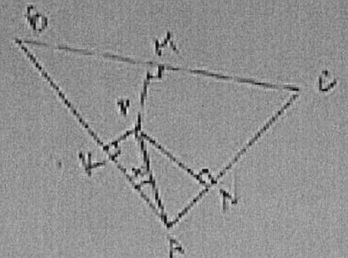
Задача 5

Шифр

Дано: $\triangle ABC$
$PK \perp AB$
$PN \perp AC$
$PM \perp BC$

$\min\left(\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}\right)$

Решение



Сумма будет минимальна, если все дроби в сумме $\left(\frac{BC}{PM}, \frac{AC}{PN}\text{ и }\frac{AB}{PK}\right)$ будут равны. Это произойдет лишь в том случае, если $\triangle ABC$ – будет правильным, а тогда точка P, будет точкой пересечения биссектрис, высот и медиан. Проведем отрезок AP – биссектриса, тогда $\angle PAK = 30^\circ$ (в правильном треугольнике ABC), тогда $\operatorname{ctg}\angle PAK = \frac{AK}{PK} = \sqrt{3}$, т.к. $AK = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \frac{AB}{PK} = 2\sqrt{3}$

Тогда $\min\left(\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}\right) = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

Минимальное значение

Существует единственная точка P, равноудаленная от всех сторон в правильном треугольнике, правильный треугольник взят ибо именно в нем достигается минимальное значение

Ч. т. д.