ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004561

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ГАНИН
	Имя	МИХАИЛ
	Отчество	АЛЕКСАНДРОВИЧ
5.	Дата рождения	22 (число) 12 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Саратовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Саратов
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ Физико-технический лицей № 1 города Саратова

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	5	6	32

Место для скобы

Шифр 004561

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

1) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$, $x-\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$ - целые числа

1) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=-\left(\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}\right)$.

Если одно из них целое число, то другое - так же целое число.

2) $x-\frac{1}{x}$ - целое число

$$\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

$x-1$, x, $x+1$ - 3 идущих подряд числа. $x-1$ делится на x или $x+1$ делится на x только в том случае, когда $x=\pm1$. При других значениях x одно из этих чисел не может делиться на другое.

При $x=1$ или $x=-1$

$$x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=0$$

$x=1 \Rightarrow x-\frac{1}{x}=1-\frac{1}{1}=1-1=0$

$x=-1 \Rightarrow x-\frac{1}{x}=-1+1=0$

Подставим эти значения x в другие выражения

При $x = 1$

$$\frac{1}{1+2021} - \frac{1}{1} = \frac{1}{2022} - 0 = \frac{1}{2022}$$ - нецелое

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1+2021} = 0 - \frac{1}{2022} = -\frac{1}{2022}$$ - нецелое

При $x = -1$

$$\frac{1}{1+2021} + \frac{1}{1} = \frac{1}{2022} + 1$$ - нецелое

$$-\frac{1}{1} - \frac{1}{1+2021} = -1 - \frac{1}{2022}$$ - нецелое

Следовательно, при данных значениях x остальные выражения не являются целыми числами.

Значит, такого числа не существует, при котором бы все 3 числа являлись целыми.

Ответ: не существует.

Место для скобы

Шифр 004561

② $\sin 2x + \sin^5 2x + 2020 \cdot \sin^9 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020 \cdot \cos^9 4x$

Пусть $\sin 2x = a$, $a \in [-1;1]$

$\cos 4x = b$, $b \in [-1;1]$

$$a + a^5 + 2020a^9 = b + b^5 + 2020b^9$$

$$a(1 + a^4 + 2020a^8) = b(1 + b^4 + 2020b^8)$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b \\ 2020a^8 + a^4 + 1 = 2020b^8 + b^4 + 1 \end{cases} (**) \\ \begin{cases} a = 2020b^8 + b^4 + 1 \\ b = 2020a^8 + a^4 + 1 \end{cases} (*) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

(*) $a = 2020(2020a^8 + a^4 + 1)^8 + (2020a^8 + a^4 + 1)^4 + 1$

Т.к. $a \leq 1$, то $2020(\underbrace{2020a^8 + a^4 + 1}_{\geq 1})^8 + (\underbrace{2020a^8 + a^4 + 1}_{\geq 1})^8$

должно быть равно нулю, но это выражение не равняется нулю ни при каком значении a. Следовательно, данное выражение не имеет корней.

(**) $\left[\begin{array}{l} a = b \\ 2020a^8 + a^4 + 1 = 2020a^8 + a^4 + 1 \end{array}\right.$ - верно!

Значит, $a = b$

$\sin 2x = \cos 4x$

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

$t = \sin 2x$

$t = 1 - 2t^2$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$2t^2 + 2t - t - 1 = 0$

$2t(t+1) - 1(t+1) = 0$

$(2t-1)(t+1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi p, p \in Z \\ 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{12} + \pi p, p \in Z \\ x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z; \frac{5\pi}{12} + \pi p, p \in Z; \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z \right\}$

Место для скобы

Шифр

(4) $$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{2020^4}\right)} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}$$

$$\frac{x^3}{m+x\cdot\sqrt[3]{2020^4}} + \frac{m}{x^3+x\sqrt[3]{2020^4}} + \frac{x\cdot\sqrt[3]{2020^4}}{m+x^3} \le \frac{3}{2}$$

Пусть $x^3=a$

$m=b$

$x\cdot\sqrt[3]{2020^4}=c$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\le\frac{3}{2}$$

Лемма: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

Доказательство леммы: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$

$$\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}+1+\frac{c}{a+b}+1\ge\frac{3}{2}+3$$

$$\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}\ge\frac{9}{2}$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\ge\frac{9}{2}$$

$$\frac{2(a+b+c)}{2}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\ge\frac{9}{2}$$

$$④\ \left(\frac{a+b}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{b+c}{2}\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)\geqslant\frac{9}{2}$$

$$\frac{2(a+b+c)}{3}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}}$$

~~Т.к.~~ $\cancel{\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant\frac{n}{}}$

$$\frac{2a+2b+2c}{3}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}}$$

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3}\geqslant\frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}}$$

(а это автором не доказано!)

Т.к. $\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}}$, где $n=3$, $x_1=a+b$, $x_2=b+c$, $x_3=a+c$, то

данное ~~рав~~ неравенство верное!

Следовательно, $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$

Тогда
$$\begin{cases}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\leqslant\frac{3}{2}\\[2mm]\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\ \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2}$$

выполняется только при равенстве +

6 страница

Место для скобы

Шифр

(4) Продолжение

Равенство возможно только при $a=b=c=1$?

Тогда $k=m=1$

$$\begin{cases} x^3=1 \\ x\cdot\sqrt[3]{2010^4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{2020^4}} \end{cases} \Leftrightarrow x=1=\frac{1}{\sqrt[3]{2020^4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2010^4}=1 \text{ – неверно!}$$

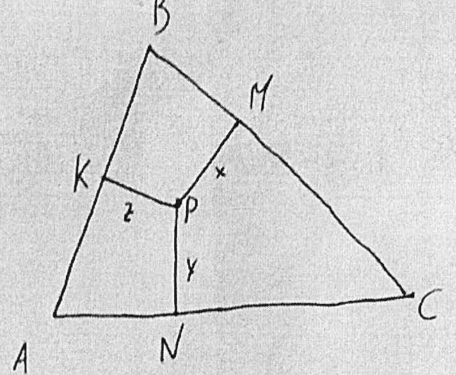
Следовательно, такого m значения m не существует, при котором бы выполнялось данное неравенство.

Ответ: $\varnothing$

Место для скобы

Шифр

(5)



Пусть $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$

$MP = x$, $NP = y$, $KP = z$.

Тогда надо найти, при каких x, y, z

$$\min\left(\frac{b}{x} + \frac{c}{y} + \frac{a}{z}\right)$$

a, b, c – константы, так как мы рассматриваем определённый треугольник и не изменяем его стороны.

Тогда необходимо найти такие x, y и z, при которых сумма будет минимальна.

Чтобы сумма дробей была минимальной при определённом числителе, знаменатель должен быть максимальным.

Такая точка P единственная – и это центр вписанной окружности.

$$f = \frac{b}{x} + \frac{c}{y} + \frac{a}{z}$$

? по какому аргументу производная...?

$$f'(?) = \frac{x-b}{x^2} + \frac{x-c}{y^2} + \frac{z-a}{z^2}$$

$f' = 0$

$$\frac{x-b}{x^2} + \frac{y-c}{y^2} + \frac{z-a}{z^2} = 0 \quad | \cdot x^2y^2z^2 \neq 0$$

$$(x-b)y^2z^2 + (y-c)x^2z^2 + (z-a)x^2y^2 = 0$$

~~Дл~~ $\begin{cases} x = b \\ y = c \\ z = a \end{cases}$ – но это невозможно

~~за~~ для минимизации функции значение b должно стремиться к значению x, y – к c, z – к a. (быть наиболее близким по значению, давать минимальной разности)

Т.к. это справедливо для любого треугольника, мы можем рассмотреть на примере любого.

Пусть ABC – равносторонний со стороной a

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

~~Пусть тоже~~ $$\frac{a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} + \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} + \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{a}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{a} + \frac{a}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{a} + \frac{a}{1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{a} =$$

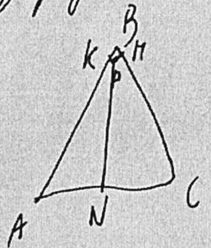
$$= 3\sqrt{3}$$

Пусть точка P является не центром вписанной окружности.

Пусть точка P приближена к точке B.

9 страница

(5) Продолжение.



$$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{NK}=$$

Пусть $PM = PK = x$, где $x \approx 0$

$$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{NK}=\frac{a}{x}+\frac{a}{x}+\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{a}{x}+\frac{a}{x}+\frac{2}{\sqrt{3}},$$ где

$\frac{a}{x}$ – стремится к бесконечности и принимает бесконечно большое значение, т.к. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)=\infty$

Значит, такая точка P единственна для любого треугольника.

Ответ: центр вписанной окружности.

Место для скобы

Шифр

(3) $p(t) = t^n + 5\cdot t^{n-1} + 3$, $n > 1$, n - целое число.

Коэффициент a перед t^n равен единице

Если многочлен имеет корни, то его можно представить в виде $(x - x_1)\dots(x - x_n) = 0$, где n-кол-во корней.

Воспользуемся методом математической индукции.

1) Рассмотрим когда будет $n=2$

$p(t) = t^2 + 5t + 3 = 0$

$D = 25 - 12 = 13$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} \text{ - нецелое число} \\ t_2 = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} \text{ - нецелое число} \end{array}\right.$$

$$t^2 + 5t + 3 = \left(t - \left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)\right)\left(t - \left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)\right) = 0$$

При $n=2$ $p(t)=0$ не имеет целых корней, и многочлен при разложении не имеют целых коэффициентов у всех слагаемых.

~~Рассмотрим $n=k$, $k\in\mathbb{Z}$, k~~

~~$p(t) = t^k + 5t^{k-1} + 3$~~

2) Предположим, что при $n=k$ многочлен $p(t)=0$ не имеет целых корней.

Тогда при $n=k+1$ у него также не должно быть целых корней

Рассмотрим $n=k+1$

$p(t)=t^{k+1}+5t^{k+1-1}+3$

$\cancel{t^{k+1}+5t^{k}+3=0}$

$t^{k+1}+5t^{k}+3=0$

Разделим его на $t^{k}+5t^{k-1}+3$

$$\begin{array}{r|l} t^{k+1}+5t^{k}+3 & t^{k}+5t^{k-1}+3 \\ \underline{t^{k+1}+5t^{k}+3t} & t \\ 3-3t & \end{array}$$

Получим

$$\frac{t^{k+1}+5t^{k}+3}{t^{k}+5t^{k-1}+3}=\frac{0}{t^{k}+5t^{k-1}+3}$$

$$t+\frac{3(1-t)}{t^{k}+5t^{k-1}+3}=0$$

По предположению индукции $t^{k}+5t^{k-1}+3=(t-t_1)\dots(t-t_k)$ нет не имеет целых корней.

~~т.к.~~ Пусть t - целое число, где t - корень $t^{k+1}+5t^{k}+3=0$

Тогда $-\frac{3(1-t)}{t^{k}+5t^{k-1}+3}$ - тоже целое число, т.к. $t=-\frac{3(1-t)}{t^{k}+5t^{k-1}+3}=$

$=\frac{3(t-1)}{t^{k}+5t^{k-1}+3}$

Тогда $t^{k}+5t^{k-1}+3$ кратно 3.

обоснован не...

Пусть t ~~р~~ - целое число

Тогда $\frac{3(t-1)}{t^{k}+5t^{k-1}+3}=$ ~~р~~ t

~~зн~~ $\frac{3(t-1)}{t^{k}+5t^{k-1}+3}$ является целым число при $t=1$, где $t\in\mathbb{Z}$, но $t=1$ не является корнем уравнения.

Место для скобы

Шифр

③ Продолжение.

$$3(t-1) = (t^k + 5t^{k-1} + 3)\cdot t$$

возрастающая функция — возрастающая функция

~~Пра~~ Правая часть возрастает гораздо быстрее левой.

Р/м малые целые значения t при ~~k=4~~ $k=3$

① $t=-2$

~~$3\cdot(-3) = ((-2)^4 + 5\cdot(-2)^3 + 3)\cdot(-2)$~~

~~$-9 = (16 -$~~

$3\cdot(-3) = ((-2)^3 + 5\cdot(-2)^2 + 3)\cdot(-2)$

$-9 = (-8+20+3)\cdot(-2)$

$9 = (23-8)\cdot 2$

$9 = 15\cdot 2$

$9 = 30$ - неверно

② $t=-1$

$3\cdot(-3) = (-1+5+3)\cdot(-1)$

$9 = 7$ - неверно

③ $t=0$

$3\cdot(-1) = 3\cdot 0$

$-3=0$ - неверно

Место для скобы

Шифр

IV При $t=1$

$3\cdot(0) = (1+5+3)\cdot 1$

$0 = 9$ - неверно

V При $t=2$

$3\cdot 1 = (8+20+3)\cdot 2$

$3 = 31\cdot 2$

$3 = 62$ - неверно

При других значениях t функция $f=(t^k+5t^{k-1}+3)\cdot t$ сильно возрастает, а при малых значениях t эти две функции не равны.

Мы рассмотрели при $k=3$, но при остальных k это работает так же, только функция будет возрастать быстрее. $f(t)=(t^k+5t^{k-1}+3)\cdot t$

Значит, при t - целом числе корней нет.

Следовательно, t - нецелое число.

Значит, по предположению мат индукции выражение $t^{k+1}+5^k+3$ так же не имеет целых корней.

Следовательно, при любом n выражение

Место для скобы

Шифр

3 Продолжение.

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$ не будет иметь целых корней, и, следовательно, его не получится представить в виде произведения многочленов положительной степени.

Ответ: нет, невозможно