07593
Шифр

ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

ет	математика
нт	1
	11
ия	Галчев
	Александр
тво	Тимурович
ождения	27 (Число) 06 (Месяц) 2006 (Год)
	Узбекистан
(пр: Томская обл., инградская область)	Узбекистан, г. Ташкент
ниципального образования , деревня, село, город)	город
енный пункт (пр: Томск, ово, Псков)	Ташкент
е наименование вательного учреждения, ром Вы обучаетесь в время	Средняя специализированная государственная общеобразовательная школа №60 имени Гёте

сие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail ультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Гал —

Шифр 07593

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
14	27.03	Кодякова Е.Е.	[signature]

№3. Доказать: для всех $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \end{cases}$ выполняется:

1	2	3	4	5	Σ
0	2	5	7	0	14

$$\frac{2a}{3(b+c)}+\frac{2b}{3(a+c)}+\frac{2c}{3(a+b)}\geq 1.$$

Приведем дроби в левой части к общему знаменателю:

$$\frac{2a\cdot\cancel{3}(a+c)\cdot 3(a+b)+2b\cdot\cancel{3}(b+c)\cdot 3(a+b)+2c\cdot\cancel{3}(b+c)\cdot 3(a+c)}{\cancel{3}\cdot 3\cdot 3(a+b)(a+c)(b+c)}\geq 1$$

$$\frac{2a^3+2a^2b+2a^2c+2abc+2b^3+2ab^2+2b^2c+2abc+2c^3+2ac^2+2bc^2+2abc}{3(a+b)(a+c)(b+c)}\geq 1.$$

Вычтем из обеих частей 1 и снова приведем левую часть к общему знаменателю.

-1 примет вид:

$$-\frac{3(a+b)(a+c)(b+c)}{3(a+b)(a+c)(b+c)}=\frac{-3a^2b-3a^2c-3abc-3ac^2-3ab^2-3abc-3b^2c-3bc^2}{3(a+b)(a+c)(b+c)}$$

№3 (продолжение)

сгруппировав (приведя подобные) получим:

$$\frac{2a^3+2b^3+2c^3-a^2b-a^2c-ab^2-b^2c-ac^2-bc^2}{3(a+b)(a+c)(b+c)} \geq 0.$$

Выражение в знаменателе состоит из 4 сомножителей, один из которых — число 3 (>0), все другие являются суммой двух положительных чисел. Т.о. выр-е в знаменателе положительно.

Рассмотрим выр-е в числителе.

$$a^3-a^2b-ab^2+b^3+a^3-a^2c-ac^2+c^3+b^3-b^2c-bc^2+c^3,$$

Сгруппируем:

$$a^2(a-b)-b^2(a-b)+a^2(a-c)-c^2(a-c)+b^2(b-c)-c^2(b-c)$$

$$(a^2-b^2)(a-b)+(a^2-c^2)(a-c)+(b^2-c^2)(b-c).$$

Известно, $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$

Тогда выр-е в числителе эквивалентно

$$(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c).$$

Данное выражение состоит из 3 слагаемых, каждое из которых является произведением квадрата двучлена и суммы двух положительных чисел и т.о. не может быть отрицательным.

МЕСТО
скобы

Шифр 07593

№3 (прод.)

Т.о. выполняется нер-во (при $a, b, c > 0$)

$$\frac{(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c)}{3(a+b)(a+c)(b+c)} \geq 0,$$

что эквивалентно

$$\frac{a}{3(b+c)}+\frac{b}{3(a+c)}+\frac{c}{3(a+b)} \geq \frac{1}{2},$$ что и требовалось доказать.

№4. Многочлен $ax^3 - ax^2 + bx + b$ можно представить как $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Раскрыв выражение, получим:

$ax^3 - ax^2 + bx + b = ax^3 - a(x_1+x_2+x_3)\cdot x^2 + a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\cdot x - a x_1\cdot x_2\cdot x_3$

Т.к. 2 многочлена равны, коэф-ты при соответствующих членах тоже равны. Имеем:

$$\begin{cases} -a = -a(x_1+x_2+x_3) \\ a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = b \\ -ax_1x_2x_3 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3 = 1 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \frac{b}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Преобразуем искомое выражение:

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) = (x_1+x_2+x_3)\cdot\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}.$$

№4 (прод.)

С учётом $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{b}{a} \\ x_1x_2x_3=-\frac{b}{a} \end{cases}$

искомое выражение принимает вид:

$$1\cdot\frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}}=-1 \quad (\text{при } a\neq 0,\ b\neq 0),$$

что и требовалось доказать.

№2. Преобразуем ур-е, используя логарифмич. свойства:

$$2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{x^2-2022} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{\log_2(x^2-2023)}{\log_2 10}} - (x^2-2022)\lg 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2-2023)^{\log_{10}2} = (x^2-2022)\lg 2.$$

$$(x^2-2023)^{\lg 2} = (x^2-2022)\lg 2$$

Пусть $(x^2-2023)^{\lg 2} = f(x) = \left(2^{\lg(x^2-2023)}\right)$

$(x^2-2022)\lg 2 = g(x)$

Тогда $D(g)=(-\infty;\infty)$, $D(f)=\cancel{(-\infty;\infty)}$ $(-\infty;-\sqrt{2023})\cup(\sqrt{2023};\infty)$

..МЕСТО скобы

Шифр

№2. Рассмотрим

$f(x) = 2^{\lg(x^2-2023)}$, $g(x) = \lg 2^{x^2-2022}$ $\boxed{= \cancel{(x^2-2022)} \lg 2.}$

Для $f(x)$ $D(f) = (-\infty; \sqrt{2023}) \cup (\sqrt{2023}; +\infty)$

$(x^2-2023>0 \Rightarrow x^2>2023)$.

При этом соответствующие функции (показательная $f(x)$ и логарифмическая $g(x)$) симметричны (т.к. зависят от x^2), в натуральной полуплоскости от Oy сохраняют знак и характер роста.

Т.к. $f(x)$ и $g(x)$ зависят от x^2, то если x_1 — корень, $(-x_1)$ — тоже корень. Тогда корней чётное к-во, а с учётом постоянства знака, темпа роста в натур. полуплоскости корней может быть либо 0, либо 2.

Сравним значения на $x \in (\sqrt{2023}; \sqrt{2025})$

$\lim\limits_{x \to \sqrt{2023}+0} 2^{\lg(x^2-2023)} = \lim\limits_{x^2 \to 2023+0} 2^{\lg(x^2-2023)}$.

Т.к. логарифмич. ф-я с основанием >0 уменьшается с ростом / уменьшением аргумента,

$\lim\limits_{x \to 0+0} \lg x \to -\infty$, тогда $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x \to 0$.

$g(\sqrt{2023}) = \lg 2^1 = \lg 2$ (>0)

Шифр

№2 (пр. ор.)

$f(\sqrt{2024}) = 2^{\lg 1} = 1$, $g(\sqrt{2024}) = \lg 2^2 = 2\lg 2 = \lg 4$.

Т.к. $4 < 10$, то $\lg 4 < 1$.

Значит, $f(\sqrt{2024}) > g(\sqrt{2024})$

$f(\sqrt{2025}) = 2^{\lg 2}$, $g(\sqrt{2025}) = \lg 2^3 = \lg 8$.

Т.о. уравнение имеет 2 корня.

Ответ: 2.