ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004566

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Ф Л О Р Е Н С К А Я
	Имя	Л И Д И Я
	Отчество	К И Р И Л Л О В Н А
5.	Дата рождения	18 (число) 11 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Москва
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Москва
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБОУ ФМШ №2007

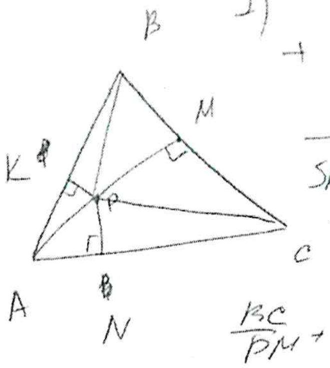
Место для скобы

Шифр 004566

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21	27.02.21	Коряжкина Е.Е.	[signature]

№5.



1) $S_{BPC} = \frac{1}{2} PM \cdot BC$

$+ \; S_{APC} = \frac{1}{2} PN \cdot AC$ — даже, если точка P проецируется не на сторону Δ, а на прямую ее содержащую

$S_{APB} = \frac{1}{2} PK \cdot AB$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}(PM\cdot BC + PN \cdot AC + PK \cdot AB)$

2) Рассмотрим выражение

$$\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}.$$

Умножим его на $S_{ABC} = \frac{1}{2}(PM\cdot BC + PN\cdot AC + PK\cdot AB)$

$$\left(\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}\right)\cdot \frac{1}{2}\cdot(PM\cdot BC + PN\cdot AC + PK\cdot AB) =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(BC^2 + AC^2 + AB^2 + \frac{BC\cdot PN\cdot AC}{PM} + \frac{BC\cdot PK\cdot AB}{PM} + \frac{AC\cdot PM\cdot BC}{PN} + \frac{AC\cdot PK\cdot AB}{PN} + \frac{AB\cdot PM\cdot BC}{PK} + \frac{AB\cdot PN\cdot AC}{PK}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(BC^2 + AC^2 + AB^2 + BC\cdot AC\left(\frac{PN}{PM} + \frac{PM}{PN}\right) + AB\cdot BC\left(\frac{PK}{PM} + \frac{PM}{PK}\right) + AC\cdot AB\left(\frac{PK}{PN} + \frac{PN}{PK}\right)\right).$$

По неравенству Коши $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow$

$$\left(\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}\right) S_{ABC} \geq \frac{1}{2}\cdot\left(BC^2 + AC^2 + AB^2 + 2BC\cdot AC + 2AB\cdot BC + 2AC\cdot AB\right).$$

Значит исходное выражение не меньше, чем полученное.

1	2	3	4	5	Σ
0	4	4	6	7	21

Место для скобы

Шифр 004566

4) Равенство достигается, если в том неравенстве Коши $a = \frac{1}{a}$, то есть

~~$\frac{PK}{PM} + \frac{PM}{PK}$~~

$PK = PM = PN$. Получается, что точка P равноудалена от сторон $\triangle ABC$ => это центр вписанной в него треугольника (он всегда лежит внутри него).

Ответ: P единственна, это центр вписанной в ABC окружности

№2.

Пусть $\sin 2x = t$. Тогда $t + t^5 + 2020 \cdot t^9$ – возрастает на промежутке от -1 до 1. А вот

$\cos 4x + \cos^5(4x) + 2020 \cos^9(4x) =$

$1 - 2\sin^2 2x + (1 - 2\sin^2 2x)^5 + 2020(1 - 2\sin^2 2x)^9$ – убывает.

$1 - 2t^2 + (1 - 2 \cdot t^2)^5 + 2020(1 - 2 \cdot t^2)^9$ наоборот. Значит на этом промежутке ~~уравн~~ корень единственен.

? Подбором получаем, что при $\sin 2x = \frac{1}{2}$ все верно:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{2020}{2^9} = \underline{1 - \frac{2}{4} + \left(1 - \frac{2}{4}\right)^5 + 2020\left(1 - \frac{2}{4}\right)^9}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{2020}{2^9}.$$

Значит $\sin 2x = \frac{1}{2}$

~~$2x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$~~ ~~$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$~~

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

~~Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.~~

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

∓

Место для скобы

Шифр 004566

№4 Для начала докажем следующее неравенство: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\geq\frac{3}{2}$.
Пусть $a+b+c=n$, $b+c=t$, $a+c=y$, $a+b=z$. Тогда нужно доказать, что $\frac{n-t}{t}+\frac{n-y}{y}+\frac{n-z}{z}\geq\frac{3}{2}$.

$$\frac{n}{t}-1+\frac{n}{y}-1+\frac{n}{z}-1\geq\frac{3}{2}$$

$$n\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq\frac{3}{2}+3 \quad (1)$$

По неравенству о средних, среднее арифм. этих чисел больше или равно их среднему гармоническому и для $\frac{1}{t};\frac{1}{y};\frac{1}{z}$ верно, что

$$\frac{\frac{1}{t}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3}\geq\frac{3}{\cancel{t}+y+z}=\frac{3}{a+b+c+a+c+a+b}=\frac{3}{2n}$$

~~Тогда подставим это в (1)~~. Значит:

$$n\cdot\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq n\cdot\frac{3\cdot3}{2n}=\frac{9}{2}.$$ см.(1) А значит

мы доказали, что $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\geq\frac{3}{2}$.
Теперь вернемся к задаче. Пусть $a=x^3$, $b=m$; $c=\sqrt[3]{2020^x}$. Тогда условие запишется так:

$$\frac{a}{b+c}\leq\frac{3}{2}-\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\Rightarrow\frac{3}{2}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

Но по выше доказанному $\frac{3}{2}\leq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\Rightarrow$ возможно только, что

$$\frac{3}{2}=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b},$$ а это верно только если в том неравенстве о средних

$\frac{1}{t}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$. $\Rightarrow t=y=z\Rightarrow b+c=a+c=a+b\Rightarrow$
$a=b=c$

Место для скобы

Шифр

Значит $x^3 = m = \sqrt[3]{2020^4} \cdot x$

Нам нужны значения m при которых существуют положительные решения.

$x^3 = \sqrt[3]{2020^4} \cdot x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \sqrt[3]{2020^4} = 2020^{\frac{4}{3}} \\ x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = \pm 2020^{\frac{2}{3}} \\ x = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} m = x^3 = \pm 2020^{\frac{2}{3}} \\ m = x^3 = 0 \end{array}\right.$ 1) Если $m=0$, то $x=0$ — не подходит

2) Если $m = -2020^{\frac{2}{3}}$, то $x = -2020^{3 \cdot \frac{2}{3}}$, что ~~ниже~~ меньше нуля, что нам тоже не подходит $\Rightarrow$

Остается только $m = 2020^{\frac{2}{3}}$.

Ответ: ~~[illegible]~~ 2020^2.

№1.

~~Пусть $x - \frac{1}{x} = n$, $n \in \mathbb{Z}$.~~

~~Тогда $x = n + \frac{1}{x} = \ldots$~~

Заметим, что $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} = -\left(\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}\right)$

Значит, если $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ и $x - \frac{1}{x}$ — целые, то третье число — тоже. (ведь если $a \in \mathbb{Z}$, то $-a$ тоже $\in \mathbb{Z}$)

Задача не решена, но я думаю что надо использовать свойства целых чисел, например что их сумма - целое число или что их подобные числа пропорциональны. Связывая ~~их~~ между собой таким образом, мы будем получать новые целые числа, полученные из x и в итоге либо придем к противоречию, либо же найдем пример (но я склоняюсь к 1 варианту)

№3. Если это возможно, то

$$t^n + 5t^{n-1} + 3 = (t^{k_1} + \dots + a_1)(\dots)(t^{k_n} + \dots + a_n)$$

причем $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 3$, $k_1 + \dots + k_n = n$

Значит, т.к. коэффициенты целые, то $a_1, a_2, \dots a_n$ — делители тройки

То есть числа из набора $-1, 1, 3, -3$.

Причем только одно из них равно ± 3, остальные — $\pm$ единицы. В исходном многочлене нет коэффициентов ниже, чем $n-1$, значит они все взаимоуничтожились при раскрытии скобок.

~~Получим коэффициент при t^{n-1} должно было~~

решение не доведено до конца