ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004468

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Ф И Л И М О Н О В
	Имя	Н И К О Л А Й
	Отчество	Н И К О Л А Е В И Ч
5.	Дата рождения	2 2 (число) 0 3 (месяц) 2 0 0 4 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Москва
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Москва
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБОУ Школа № 2054

Место для скобы

Шифр 004468

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
26 б	14.04.21	Гендрина И.Ю.	[illegible]

№1

Рассмотрим $x-\frac{1}{x}$

$$x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}$$ - целое

7б

целым оно быть не может из свойств четных чисел.

Если мы подставляем четное число, то получим произведение нечетных чисел, деленное на четное число $\Rightarrow$ целым оно не будет

При подставлении нечетного мы получим произведение ~~не~~четных чисел, деленное на нечетное. Но нечетное число не является делителем ни одного из четных чисел, потому что они получены сложением и вычитанием единицы $\Rightarrow$ $x-\frac{1}{x}$ всегда нецелое $\Rightarrow$ Ответ: нет

1	2	3	4	5
7	5	7	7	0

Место для скобы

Шифр 004468

№2

Слева и справа один и тот же многочлен $2020t^9+t^5+t$ от разных переменных ($\cos 4x$ и $\sin 2x$)

Равенство достигается тогда, когда $\cos 4x = \sin 2x$

Недост. обосн.

$\cos 4x = \sin 2x$

$1-2\sin^2 x = \sin 2x$

5 б

$2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$

$\sin 2x = t$

$2t^2+t-1=0$

$D = 1+4\cdot 2 = 9$

$t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1 \Rightarrow \sin 2x = -1$

Ответ:

$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \Rightarrow$

$2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in Z \end{array}\right.$$

Шифр 004468

Место для скобы

№3

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3 \quad n > 1 \quad n \in \mathbb{Z}$

Допустим, что $p(t) = f(t) \cdot g(t)$, где $f(t)$ и $g(t)$ - многочлены положительной степени с целыми коэффициентами

Тогда $p(t) \bmod 3 \equiv t^n + 5t^{n-1} = t^{n-1}(t+5)$ и

$p(t) \bmod 3 = f(t) \cdot g(t) \bmod 3 \equiv t^{n-1}(t+5)$

7б

Тогда по свойству единственности разложения на множители: $f(t) = t^i$; $g(t) = t^j(t+5)$

$i + j = n-1$, но i и j не могут быть одновременно > 0, т.к в этом случае $f(0)$ делится на 3, $g(0)$ также делится на 3 $\Rightarrow f(0) \cdot g(0)$ делится на 9

Но $f(0) g(0) = p(0)$ на 9 не делится

Таким образом или $i = 0$, что противоречит условию или $j = 0$, т.е $g(t) = t + x_0$. Т.е x_0 является корнем многочлена $p(t)$, но у $p(t)$ нет корней. Таким образом многочлен представить в виде произведения нельзя

Ответ: Нет

Место для скобы

Шифр

№ 4

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x^3+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}$$

замена: $x^3=n$; $\sqrt[3]{2020^4}\cdot x=k$; $m,n,k>0$

$$\frac{n}{m+k} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{n+k} - \frac{k}{m+n}$$

$$\frac{n}{m+k} + \frac{m}{n+k} + \frac{k}{m+n} \le \frac{3}{2}$$

$$\frac{2n}{m+k} + \frac{2m}{n+k} + \frac{2k}{m+n} \le 3$$

Пусть $a=m+k$, $b=n+k$, $c=m+n$, тогда $2n=b+c-a$; $2m=a+c-b$; $2k=a+b-c$; $a,b,c>0$

$$\frac{b+c-a}{a} + \frac{a+c-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} \le 3$$

$$\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} - 3 \le 3$$

7б

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right) \le 6$$

По неравенству о средних $x+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$ $\Rightarrow$ каждая скобка ≥ 2. Равенство достигается при $x=\frac{1}{x}=1$, т.е в нашем случае при $a=b=c \Rightarrow m=n=k \Rightarrow m=x^3=\sqrt[3]{2020^4}\cdot x$

$$\left.\begin{matrix} x^2=\sqrt[3]{2020^4} \\ x>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x=\sqrt[3]{2020^2};\ m=x^3=\left(\sqrt[3]{2020^2}\right)^3=2020^2$$

ответ: $m=2020^2$