ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004469

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Ф Е Д О Р О В
	Имя	К И Р И Л Л
	Отчество	С Е Р Г Е Е В И Ч
5.	Дата рождения	2 8 (число) 0 6 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Кемеровская область - Кузбасс
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Новокузнецк
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБ НОУ "Лицей №84 им. В.А.Власова"

Место для скобы

Шифр 004469

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
29б	14.04.21	Гендрише А.А.	

№2

$\sin 2x + \sin^5 2x + 2020 \cdot \sin^9 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020 \cdot \cos^9 4x$

Пусть $\sin 2x + \sin^5 2x + 2020 \cdot \sin^9 2x = f(\sin 2x)$, где

1) $f(a) = a + a^5 + 2020 \cdot a^9$, а так же

$\cos 4x + \cos^5 4x + 2020 \cdot \cos^9 4x = f(\cos 4x)$, где

2) $f(b) = b + b^5 + 2020 \cdot b^9$

Для любой из данных функций:

$f'(a) = 1 + 5a^4 + 9\,2020a^8 \Rightarrow f'(a) > 0$ $\Rightarrow$?

$f'(b) = 1 + 5b^4 + 9\,2020b^8 \Rightarrow f'(b) > 0$

?

$f(\sin 2x) = f(\cos 4x) \Rightarrow \sin 2x = \cos 4x$

$\sin 2x = \cos 4x$

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

$2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = \dfrac{-1-3}{4} = -1 \\ \sin 2x = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

так же: $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)$

$\left[\begin{array}{l} -4x = \pi + 4\pi n, n \in Z \\ 12x = \pi + 4\pi n, n \in Z \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z \end{array}\right. \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

6б

$\sin 2x = -1$

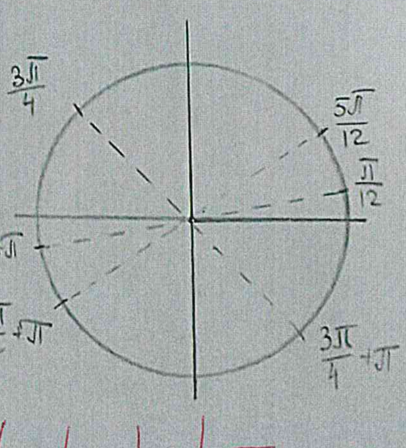
$2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

$\sin 2x = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z \end{array}\right.$



$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

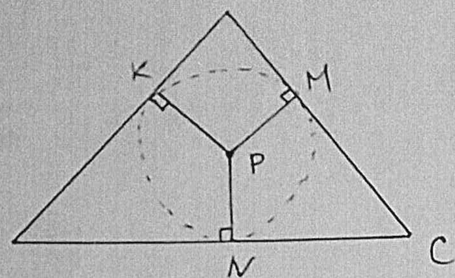
Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

1	2	3	4	5
7	6	4	5	7

Место для скобы

Шифр 004469

№ 5



Дано:
$\triangle ABC$; т. P – лежит в $\triangle ABC$
$PK \perp AB$; $PM \perp BC$; $PN \perp AC$

Найти
$$\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK} = \min - ?$$

Решение

1. Используем неравенство о среднем: $\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK} =$
$= \frac{a}{PM} + \frac{b}{PN} + \frac{c}{PK}$, где $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

$\frac{a}{PM} + \frac{b}{PN} + \frac{c}{PK} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{PM \cdot PN \cdot PK}}$. Это значит, что $\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}$ будет минимально при $\frac{a}{PM} + \frac{b}{PN} + \frac{c}{PK} = 3\sqrt[3]{\frac{abc}{PM \cdot PN \cdot PK}}$

Данное равенство верно только тогда, когда $a = b = c$, т.е $\triangle ABC$ – равносторонний, тогда $PK = PM = PN = r$, где r – радиус вписанной окружности.

Соответственно сумма: $\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}$ будет принимать минимальное значение в том случае, когда т. P – центр вписанной окр.

Ответ: сумма $\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}$ будет принимать наименьшее значение, когда т. P – центр вписанной окр. в $\triangle ABC$.

✓ 7б

№ 4

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}, \quad m>0$$

Пусть $a = x^3$; $b = \sqrt[3]{2020^4}\cdot x$, тогда

$$\frac{a}{m+b} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{a+b} - \frac{b}{m+a}$$

$\frac{a}{m+b} + \frac{m}{a+b} + \frac{b}{m+a} \le \frac{3}{2}$, так же $\frac{a}{m+b} + \frac{m}{a+b} + \frac{b}{m+a} \ge \frac{3}{2}$ (по лемме) ?

1) $\frac{a}{m+b} + \frac{m}{a+b} + \frac{b}{m+a} = \frac{3}{2}$, при $a = b = m$

Тогда $x^3 = \sqrt[3]{2020^4}\cdot x = m \Rightarrow x^2 = \sqrt[3]{2020^4} \Rightarrow x = 2020^{\frac{2}{3}}$

$m = x^3 = 2020^{\frac{2}{3}\cdot 3} = 2020^2 = 4080400$ - одно из решений.

но, т.к $\frac{a}{m+b} + \frac{m}{a+b} + \frac{b}{m+a}$ может быть только равно $\frac{3}{2}$, то

$m = 4080400$ - решение

Ответ: $m = 4080400$.

5 б

Шифр

№1

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

Видно, что число $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ отличается от $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$ в (-1) раз

Тогда: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ - целое ; $x-\frac{1}{x}$ - целое

Пусть $a=x-\frac{1}{x}$, $a\in Z$, тогда $\frac{1}{x}=x-a$, где

$\frac{1}{x}$ - гипербола, симметричная отн. т.$(0;0)$; $x-a$ - прямая

$\Rightarrow$ можно рассматривать лишь участок, где $x>0$

Так как числа явл. целыми, тогда общий вид решения:

$x=2^n$, $n\in N$

Подставим $x=2^n$ в первое число

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n}+2021}$, пусть $\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{3n}+2021}=c$, где $c\in Z$

$\frac{1}{2^{2n}+2021}=\frac{1}{2^n}-b=\frac{1-b\cdot 2^n}{2^n}$ $\Rightarrow 2^n=(1-b\cdot 2^n)(2^{2n}+2021)$

Пусть $2^n=a$, $a>0$

$a-(1-b^a)(a^2+2021)=a-(a^2-ba^3+2021+2021ba)=$

$=a-a^2+ba^3-2021-2021ba$

И если данное уравнение будет иметь корни, то $a_1+a_2+a_3=-1$,

а т.к. $a=2^n$, $a>0$, то корней уравнения, удовлетворяющих условию нет

Ответ: такого числа несуществует.

7б

сто для
жобы

Шифр

№3

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$, n - целое

$$p(t) = t^{n-1}\left(t + 5 + \frac{3}{t^{n-1}}\right) = t^{n-1}\left(t+5+\frac{3t}{t^n}\right) = \frac{t^n}{t}\cdot\left(t+5+\frac{3t}{t^n}\right) =$$

$$= \frac{t^{n+1} + 5t^n + 3t}{t}$$

Пусть $n=2$, то

$$t^2 + 5t + 3 = \left(t - \left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)\right)\left(t - \left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)\right)$$

$D = 13$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \\ t_2 = \frac{-5+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$$

В данном случае коэффициенты не целые, в других случаях разложение на множители невозможно
$(t^{n-1}(t+5)+3)$

Ответ: нет, невозможно.

Недост. обоснован
общий
случай

4б