Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

03780

Шифр

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ФЕДОРИН
	Имя	КИРИЛЛ
	Отчество	ВЯЧЕСЛАВОВИЧ
5.	Дата рождения	Число: 31; Месяц: 12; Год: 2003
6.	Страна	Российская Федерация
7.	Регион *(пр: Томская обл., Калининградская область)*	г. Санкт-Петербург
8.	Вид муниципального образования *(пр: пгт, деревня, село, город)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Петергоф
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время	ФГБОУ ВО СПбГУ и Академическая Гимназия им. Д. К. Фадеева

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ______

Место для скобы

Шифр 03780

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
32		Емельянова	Ем

1	2	3	4	5	Σ
7	6	7	7	5	32

№1. Докажем по индукции $S_n - 1 = -\frac{1}{(n+1)!}$

База: $S_1 - 1 = \frac{1}{2!} - 1 = -\frac{1}{2!}$ - верно

Предположение индукции: $\forall n \in \mathbb{N}$ верно: $S_n - 1 = -\frac{1}{(n+1)!}$

Ход индукции $\exists$ $S_n - 1 = -\frac{1}{(n+1)!}$, докажем для S_{n+1}, что $S_n - 1 = -\frac{1}{(n+1)!}$:

из предполож. индукции

$S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{(n+2)!} \Rightarrow S_{n+1} - 1 = S_n - 1 + \frac{n+1}{(n+2)!} \overset{\vee}{=} -\frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} =$

$= \frac{n+1-n-2}{(n+2)!} = \frac{-1}{(n+2)!} \Rightarrow$ для S_{n+1} тоже верно $\Rightarrow$ верно $\forall n \in \mathbb{N}$

Тогда $2022!(S_{2021} - 1) = 2022! \cdot \left(-\frac{1}{2022!}\right) = -1$

Ответ: -1

№3. $p(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$

$1 - \frac{2}{p(x)} = \frac{p(x) - 2}{p(x)} = \frac{x^2+3x+\cancel{2}-\cancel{2}}{(x+1)(x+2)} = \frac{x(x+3)}{(x+1)(x+2)}$

$\triangleleft$ 3 подряд идущие скобки в произведении:

$\frac{x \cdot \cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)} \cdot \frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+4)}}{(x+2)\cancel{(x+3)}} \cdot \frac{\cancel{(x+2)}(x+5)}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x+4)}} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+5}{x+4}$

1 из них полностью сокращается с помощью 2 крайних. Понятно, что в следующей тройке ситуация повторится (как и в последующих). Поэтому $\left(1 - \frac{2}{p(1)}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{p(2)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{2}{p(2021)}\right)$

$= \frac{1}{1+2} \cdot \frac{2021+3}{2021+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2024}{2022} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1012}{1011} = \frac{1012}{3033}$

Ответ: $\frac{1012}{3033}$

Место для скобы

Шифр 03780

№4. Заметим, что по условию a, b, c – корни одного куб. ур-ия $x^3-2022x^2+1011$

Тогда по т. Виета: $a+b+c=-(-2022)=2022$, $abc=1011$

$abc\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}\right)=a+b+c$

Откуда $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{2022}{1011}=2$

Ответ: 2.

№5.

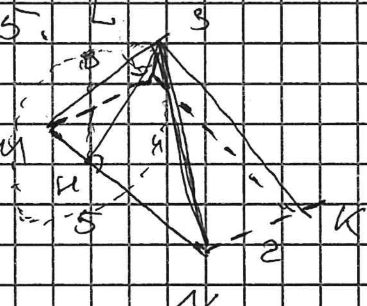

Рис. Т.к. $V(SMNKL)=S(MNKL)\cdot h\cdot\frac{1}{3}$

где $S(MNKL)=5\cdot 2=10$ из усл-ия, то

т.н. max h пирамиды.

Проведём сферу с MN как диаметром,

SMNKL – пирамида | т.к. △SMN – прямоуг. (египет. треуг.), то

MNKL – прямоуг. | угол ∠SMN – вписанный, опир. на диам. MN.

$MN=5$ | Тогда мн-во возможных точек S

$KN=2$ | находится на окружности C перпендик.

$SM=3$ | ~~MN~~: $SH\perp MN$, где SH – её радиус

$SN=4$

$V(SMNKL)$ – max | Тогда самая удалённая (·) от (MNK)

SK, SL – ? | в этой окр-и – та, радиус которой

перпендик. основанию. $\Rightarrow h_{max}=SH=\frac{MS\cdot SN}{MN}=\frac{12}{5}$

$V_{max}=\frac{12}{5}\cdot 10\cdot\frac{1}{3}=8$

Ответ: 8.

Место для скобы

Шифр 03780

№2. $4-\sin^2x+\cos4x+\cos2x+2\sin3x\cdot\sin7x-\cos^27x=\cos^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right)$

$2\sin3x\cdot\sin7x = \cos4x-\cos10x$

$\exists \cos^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right)=a$, тогда $a\in[0;1]$

$4-\sin^2x+\cos4x+\cos2x+\cos4x-\cos10x-\cos^27x=a$

$3+2\cos4x+\cos2x-\cos10x+(\cos x-\cos7x)(\cos x+\cos7x)=a$

$\cos x-\cos7x = 2\sin4x\cdot\sin3x \qquad \cos x+\cos7x = 2\cdot\cos4x\cdot\cos3x$

$\cos2x-\cos14x=2\cdot\sin8x\cdot\sin6x$

$3+2\cdot\cos4x+2\cdot\cos2x-(\cos10x+\cos14x)=a$

$\cos10x+\cos14x = 2\cdot\cos12x\cdot\cos2x$

$3+2\cdot\cos4x+2\cdot\cos2x-2\cdot\cos12x\cdot\cos2x=a$

$\cos12x=4\cdot\cos^34x-3\cos4x$

$\exists\cos2x=b$

$\cos4x=2\cdot\cos^22x-1$

$3+4\cos^22x-2+2\cdot\cos2x-8\cos^34x\cdot\cos2x+6\cos4x\cdot\cos2x=a$

$\cancel{1}+4b^2+2b\ \cancel{-64b^6+96b^4}-8b\cdot(8b^6-12b^4+6b^2-1)+$

$+12b^3-6b=a-1\le0$

$-64b^7+96b^5-36b^3+4b^2+4b=a-1\le0$

$f(b)=$

~~$b(-64b^6+96b^4-36b^2+4b+4)=a-1$~~

~~Понятно, что многочлен 6-ой степени все имеет корней на $[-1;0]$ ($f(0)=4$, $f'(b)$ при $b\in[-1;0]$ <0) и $a-1\in[-1;0]$~~

~~Значит, если корень есть, то только при $a-1=0=b$~~

~~$\cos2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$~~

~~$\cos\left(\frac{\pi k}{2021}\right)^2=1$~~

~~$\frac{\pi k}{2021}=2\pi d, d\in\mathbb{Z}$~~

~~Ответ: при $k=4042d, d\in\mathbb{Z}$ $\left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$ при иных k $x\in\varnothing$~~

Место для скобы

Шифр 03780

но $f(b) \geq 0$ на b в $[-1; 1]$
$0 \geq a-1$ } $\Rightarrow$ Реш-ие $\exists$ только при

$a=1$, $f(b)=0$

$a=1 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\pi k}{2021}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{\pi k}{2021}=\pi v, v \in \mathbb{Z}$

$k=2021v, v\in\mathbb{Z}$

$f(b)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \Rightarrow \cos 2x=0 \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ \frac{f(b)}{b}=0 - \varnothing \end{array}\right.$

Ответ: $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$, только при $k=2021v, v\in\mathbb{Z}$