Место для скобы

003991

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ЕЖОВА
	Имя	ИНГА
	Отчество	ДМИТРИЕВНА
5.	Дата рождения	03 (Число) 02 (Месяц) 2003 (Год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	ТОМСКАЯ ОБЛ.
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	ГОРОД
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	ТОМСК
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ ЛИЦЕЙ ПРИ ТПУ

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____

Место для скобы

Шифр 003991

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
23б	5.04.21	Гендрино И.Ю.	[signature]

2. Заметим, что левая и правая часть уравнения представлена в виде функции $f(t) = t + t^3 + t^5 \cdot 2021$, где $t_1 = \sin x$, $t_2 = \cos 2x$. Функция $f(t)$ - возрастающая $\Rightarrow$ $f(t_1) = f(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$.

Тогда $\sin x = \cos 2x \Rightarrow \sin x = 1 - 2\sin^2 x$, $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; по методу коэффициентов найдём решение получившегося квадратного уравнения относит-о $\sin x$:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{array}\right.$$

7б ✓

Проверим каждую серию решений на начальном выражении*: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin^3\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2021 \cdot \sin^5\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) + \cos^3(-\pi) + 2021\cos^5(-\pi)$;

$-1 + (-1)^3 + 2021 \cdot (-1)^5 = -1 + (-1)^3 + 2021 \cdot (-1)$;

$-2023 = -2023$ — верно.

* проверку осуществляем с наименьшими корнями серии при $n = 0$, для остальных корней выражение так же будет верно, т.к. $\sin x = \sin(x + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\sin\frac{\pi}{6} + \sin^3\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2021 \cdot \sin^5\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) + \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2021 \cdot \cos^5\left(\frac{\pi}{3}\right)$;

$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 2021 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2021 \cdot \frac{1}{32}$; $\frac{2041}{32} = \frac{2041}{32}$ — верно.

1	2	3	4	5
2	7	7	7	-

Место для скобы

Шифр 003991

Нет смысла проверять тождественность левой и правой частей ур-я при $x = \frac{5\pi}{6}$, т.к. $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \cos(\frac{5\pi}{6}\cdot 2) = \cos\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

1. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2020}$, $x - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2020} - \frac{1}{x}$,

Представим эти числа в виде:

7 б

$\frac{x^2 - x + 2020}{x(x^2+2020)}$; $\frac{x^2-1}{x}$; $-\frac{x^2-x+2020}{x(x^2+2020)}$;

Заметим, что $x \neq 0$. Из-за среднего числа хочется рассмотреть $x = \pm 1$. Но при $x = 1$, имеем для первого числа: $\frac{1-1+2020}{1+2020} = \frac{2020}{2021} \notin \mathbb{Z}$, аналогично для третьего $-\frac{2020}{2021} \notin \mathbb{Z}$.

Так же при $x = -1$, $\frac{1+1+2020}{(-1)(1+2020)} = -\frac{2022}{2021}$ – для 1о,

$-\frac{1+1+2020}{(-1)(2021)} = +\frac{2022}{2021}$ – для 3о.

Число 1 противоположно 3у числу по знаку, но равно по модулю.

Рассмотрим $\frac{x^2 - x + 2020}{x(x^2+2020)}$, $x^2+2020 \overset{\text{об}}{=} y$, $y > 0$.

$$\begin{cases} y = x^2 + 2020 \ (1) \\ \frac{y-x}{yx} = k \ (2) \end{cases}$$ где k – целое число. Выразим из (2) ур-я y:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2020 \\ y = -\frac{x}{kx-1} \end{cases} \Rightarrow \cancel{-\frac{x}{2y}} \ -\frac{x}{kx-1} = x^2 + 2020$$

По условию $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$. ~~Если x – целое,~~ то

Место для скобы

Шифр 003991

Заметим, что $\frac{y-x}{yx}$, т.к. $y>0$, то $x<0$, иначе $|y-x|<|yx|$. (!)

Так же $\frac{x^2-x+2020}{x(x^2+2020)} \neq 1$, т.к. $x^3-x^2+2021x-2020 \neq 0$ при $\forall x$. Т.к. если x - дробное число, то при увеличении степени (x^3, x^2) это значение будет только уменьшаться, т.е. $x^3-x^2<0$, а $2021 \cdot x$ $(x \notin \mathbb{Z}) < 2020$.

При учете замечания (!) $\underset{0}{\overset{\wedge}{x^3}} \underset{0}{\overset{\wedge}{-x^2}} + \underset{0}{\overset{\wedge}{2021x}} - 2020 \neq 0$ становится очевидным.

Для доказ-ва того, что не сущ-т x, при кот-м все 3 числа $\in \mathbb{Z}$ достаточно доказать:

$-\frac{x}{kx-1} \neq x^2+2020$, $k<0$, т.к. $-\frac{\overset{0}{\vee}x}{k\underset{0}{\hat{x}}-1} \Rightarrow$

т.к. справа ~~"+"~~ положит-е значение необходимо, чтобы $-\frac{x}{kx-1}>0 \Rightarrow \frac{x}{kx-1}<0$, т.к. $x<0 \Rightarrow kx-1>0 \Rightarrow$

$kx>1 \Rightarrow \begin{cases} k<0 \\ k>\frac{1}{x} \end{cases}$. (*) но при наличии условия (*) $k>\frac{1}{x}$, где $\begin{cases} x<0 \\ x\in\mathbb{Z} \end{cases}$ имеем

противоречие т.к. тогда k больше некот-о отриц-о дробного числа $\Rightarrow \min k=0$, однако 0 - невозможен, т.к. числитель дроби образует квадр-е ур-е с $D<0$.

Чтобы число $\frac{x^2-1}{x}$ - было целым, необходимо чтобы $D>0$.

Т.к. система $\begin{cases} k<0 \\ k>\frac{1}{x} \end{cases}$ не имеет решений (k должно быть >0 и <0 одновременно) $\Rightarrow x\in\varnothing$.

Место для скобы

Шифр

4. $k>0,\ x>0$

$$\underbrace{\frac{x^3}{k+\sqrt[3]{2021^4}\cdot x}}_{A}+\underbrace{\frac{\sqrt[3]{2021^4}\cdot x}{k+x^3}}_{B}\le\frac{3}{2}-\underbrace{\frac{k}{x\cdot(x^2+\sqrt[3]{2021^4})}}_{C};$$

Т.к. в A, $\begin{cases}x>0\\k>0\end{cases}\Rightarrow A>0$, так же $B>0\Rightarrow$

$\frac{3}{2}-C>0$; Т.к. $C>0\Rightarrow A+B<\frac{3}{2}$. Об нер-ва

переходим к системе нер-в ($\sqrt[3]{2021^4}\overset{об}{=}t$):

$$\begin{cases}\frac{x^3}{k+tx}+\frac{tx}{k+x^3}<\frac{3}{2};\\ \frac{3}{2}-\frac{k}{x^3+tx}>0\end{cases};\quad\begin{cases}\frac{2x^3}{k+tx}+\frac{2tx}{k+x^3}<3\\ 3-\frac{2k}{x^3+tx}>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{2x^3(k+x^3)+2tx(k+tx)-3(k+tx)(k+x^3)}{(k+tx)(k+x^3)}<0\\ \frac{3(x^3+tx)-2k}{x^3+tx}>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{3k^2+k(x^3+tx)-(2x^6+2t^2x^2-3tx^4)}{(k+tx)(k+x^3)}>0 & (1)\\ \frac{3x^3+3tx-2k}{x(x^2+t)}>0 & (2)\end{cases}$$

Для нер-ва (1) найдем D: $D=(x^3+tx)^2+4\cdot3(2x^6+2t^2x^2-3tx^4)=$

$=x^6+2x^4t+t^2x^2+24x^6+24t^2x^2-36tx^4=x^2(25x^4-34t+25t^2)$;

$|25x^4+25t^2|>>|-34t|\Rightarrow D>0.$

$$k_1=\cancel{-kx^3-ktx}\ \frac{-x^3-tx+x\sqrt{25x^4-34t+25t^2}}{6};$$

Место для скобы

Шифр

$$k_2 = \frac{-x^3 - tx - x\sqrt{25x^4 - 34t + 25t^2}}{6},$$

Для (2) нер-во: $\frac{2k - 3x^3 - 3tx}{x(x^2+t)} < 0$;

$\frac{k - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{2}tx}{x(x^2+t)} < 0$; т.к. $x(x^2+t) > 0 \Rightarrow$

$k < \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}tx$;

~~Для (1):~~ $\cancel{3\left(k - \frac{-x^3 - tx + x\sqrt{25x^4 - 34t + 25t^2}}{6}\right) \cdot \left(k - \frac{-x^3 - tx - x\sqrt{25x^4 - 34t + 25t^2}}{6}\right)}$.

Для (1):

$$\frac{3\left(k - \frac{-x^3 - tx + x\sqrt{25x^4 - 34t + 25t^2}}{6}\right)\left(k - \frac{\overset{0}{\overset{\wedge}{-x^3}} - \overset{0}{\overset{\wedge}{tx}} - x\overset{0}{\overset{\wedge}{\sqrt{25x^4 - 34t + 25t^2}}}}{6}\right)}{(k+tx)(k+x^3)} > 0;$$

~~2~~ вторая скобка числителя даёт отриц-е значение $k \Rightarrow$ её не учитываем.

Остается: $\frac{3\left(k - \frac{-x^3 - tx + x\sqrt{25x^4 - 34t + 25t^2}}{6}\right)}{(k+tx)(k+x^3)} > 0$;

$-x^3 = -\sqrt{x^6} \Rightarrow x\sqrt{25x^4 - 34t + 25t^2} > -x^3 - tx. \Rightarrow$

на пересечении этих 2х нер-в находятся методом интервалов участки с $k > 0$.

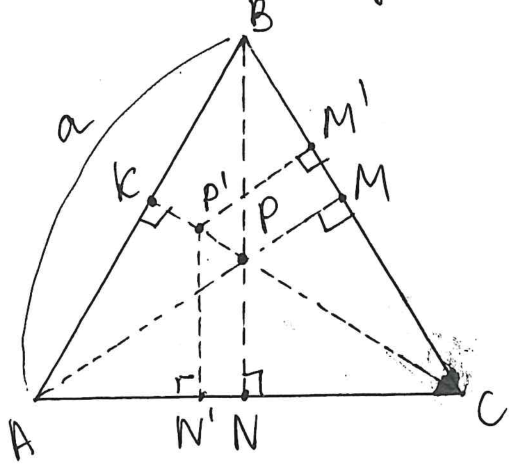
2б

Значения параметра не найдены

Место для скобы

Шифр

5. Для нахождения минимальной суммы $\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ рассмотрим частный случай равностороннего $\triangle ABC \Rightarrow PM=PN=PK$.



Тогда точка P равноудалена от сторон $\triangle$-ABC, P - центр впис. опис. окруж.-й.

Тогда PM - часть медианы $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, где $a=AB. \Rightarrow PM=\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}\Rightarrow$

$\frac{BC}{PM}=\frac{a\,6}{a\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}$, а т.к. сторона, соот-о отрезки медиан $=\Rightarrow$

$$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}=\frac{3BC}{PM}=\frac{18}{\sqrt{3}}.$$

Сместим т.P вдоль медианы CK на половину PK $\Rightarrow$ новое положение т.P — P', проведём высоту P'M'.

Т.к. $P'M' \parallel PM \Rightarrow$ по т. Фалеса $\begin{cases}\frac{PC}{PP'}=\frac{CM}{MM'} \\ \frac{PM}{P'M'}=\frac{PC}{PP'}\end{cases} \Rightarrow \frac{PM}{P'M'}=\frac{a\sqrt{3}}{6}\frac{1}{PP'}$

$$PP'=\frac{a\sqrt{3}}{2}^{\backslash 6}+\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7a\sqrt{3}}{12};$$

$\frac{PM}{P'M'}=\frac{\cancel{a\sqrt{3}}}{\cancel{6}}\cdot\frac{\cancel{12}^{2}}{7\cancel{a\sqrt{3}}}=\frac{2}{7}; \Rightarrow \frac{BC}{P'M'}=\frac{\cancel{a}\cdot 7}{2\cancel{a}}=\frac{7}{2};$

Аналогично увеличится $P'N'$, т.к. CK — биссектриса $\Rightarrow P'N'=P'M'$.

$\Rightarrow \frac{AC}{P'N'}=\frac{2}{7}$; Тогда $KP'=\frac{a\sqrt{3}}{6}^{\backslash 2}-\frac{a\sqrt{3}}{12}=\frac{a\sqrt{3}}{12}\Rightarrow$

$\frac{AB}{P'K}=\frac{\cancel{a}\cdot 12}{\cancel{a}\sqrt{3}}=\frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2\frac{BC}{P'M'}+\frac{AB}{P'K}=7+\frac{12}{\sqrt{3}};=\frac{7\sqrt{3}+12}{\sqrt{3}};$

$\frac{7\sqrt{3}+12}{\sqrt{3}} \vee \frac{18}{\sqrt{3}}; \quad 7\sqrt{3}+12 \vee 18; \quad 7\sqrt{3} \vee 6; \quad 7>6 \Rightarrow 7\sqrt{3}>6 \Rightarrow$

$\frac{7\sqrt{3}+12}{\sqrt{3}}>\frac{18}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ оптимальное расположение точки P в центре треугольника $\Rightarrow$ всего внутри произвольного $\triangle ABC$ возможна 1 точка P. Ответ: 1.

~~верная~~ идея хода

Место для скобы

Шифр

3. $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим $p(t)$ при $n = 2$: $t^2 + 5t + 3$;

приравняем к 0 и найдём решение: $t^2 + 5t + 3 = 0$;

$D = 25 - 4 \cdot 3 = 13 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}; \\ t = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow p(t) = t^2 + 5t + 3 =$

$= \left(t - \frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(t - \frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)$.

1) Предположим, что для некоторого x — это верно, т.е. $t^x + 5t^{x-1} + 3$ — разложимо на множители

Докажем для $x + 1 \Rightarrow$

$t^{x+1} + 5t^x + 3 := t \cdot t^x + 5t \cdot t^{x-1} + 3$;

Т.к. степень многочлена повысилась $\Rightarrow$ кол-во возможных решений ур-е увелич-ся на 1.

$p(t) = t(t^x + 5t^{x-1} + 3/t)$. Докажем, что

$t^x + 5t^{x-1} + 3/t$ (*) также разложимо на множители.

$D = 25 - 4 \cdot 3/t = 25 - \frac{12}{t} = \frac{25t - 12}{t}$, $t \neq 0$.

$\left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-5 + \sqrt{\frac{25t-12}{t}}}{2} \\ t = \dfrac{-5 - \sqrt{\frac{25t-12}{t}}}{2} \end{array}\right.$

Корни ур-е (*) существуют, если $D \geq 0 \Rightarrow 25t - 12 \geq 0 \Rightarrow$ $25t \geq 12 \Rightarrow t \geq \frac{12}{25} \Rightarrow t^n + 5t^{n-1} + 3$ представимо в ~~Ответ: да, возможно~~ виде произвед-е многочленов.

Ответ: да, возможно при $t \geq \frac{12}{25}$.

Ответ неверный

25