Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

003519

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	математика
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ЕРЁМИНА
	Имя	ЕЛИЗАВЕТА
	Отчество	АНДРЕЕВНА
5.	Дата рождения	30 (Число) 04 (Месяц) 2003 (Год)
6.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Томская область
7.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	село
8.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Асино)*	Бакчар
9.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение Бакчарская средняя общеобразовательная школа

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Место для скобы

Шифр 003519

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
26 б	3.04.13	Гендрина И.Ю.	

В-1

2

$\sin x+\sin^3 x+2020\cdot\sin^5 x=\cos(2x)+\cos^3(2x)+2020\cdot\cos^5(2x)$

1) Рассмотрим данное тригонометрическое уравнение: степени $\sin x$ и $\cos(2x)$ — нечётные => соотношения слагаемых равны => $\sin x=\cos(2x)$.

2) $\sin x=1-2\sin^2 x$

Перенесём всё влево и приравниваем к 0:

$\sin x-1+2\sin^2 x=0$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

3) Сделаем замену: $\sin x=t$, где $|t|\le 1$, тогда

$2t^2+t-1=0$

н.к.

$D=b^2-4ac=1+4\cdot2\cdot1=9(3^2)$

$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-1\pm3}{4}\Rightarrow t_1=-1;\ t_2=\frac{1}{2}$

7 б

4) Возврат: $t_1=-1$, $\sin x=t_1$; $t_2=\frac{1}{2}$, $\sin x=t_2$

$\sin x=-1$, $\sin x=\frac{1}{2}$

$x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

$\left.\begin{aligned}x_2&=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z\\ x_3&=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z\end{aligned}\right\}x_{23}=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

Ответ: $x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $x_{23}=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

1	2	3	4	5	~~6~~
7	7	5	4	3	

Место для скобы

Шифр 003519

①

Дано:

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$;

$x - \frac{1}{x}$;

$\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$

Существует ли такое число x, что все 3 числа являются целыми?

Д-во:

1) Рассмотрим: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$; $x - \frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$

Во всех 3-х числах есть $\frac{1}{x}$ => ОДЗ: $x \neq 0$.

2) Если $x = 1$, значит: $x - \frac{1}{x} = 0$ (целое),

а $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ — нет => и $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$ тоже,

т. к. противоположное.

3) Если $x \neq 1$, то $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} = \frac{x^2-x+2021}{x(x^2+2021)}$.

4) Рассмотрим квадратный трёхчлен: $x^2-x+2021$, найдём его корни:

$D = b^2-4ac = \cancel{1+4\cdot2\cdot1=9}\ 1-4\cdot1\cdot2021 < 0$ => на множители разложить нельзя => и сократить нельзя.

Из всего следует: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ — не целое =>

=> **не существует** такого числа x, что все 3 данных числа являются целыми.

ч.т.д.

1 б

③

Дано:

$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$

n - целое, $n > 1$

Возможно ли представить f(x) в виде пр-я многочленов положит. степени с целыми коэфф-ми?

Д-во:

$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, n - целое, $n > 1$.

5 б

1) Если взять $n = 2$, то $f(x) = x^2 + 5x + 3$

т.к. $D = b^2-4ac = 25-4\cdot3 = 13$

не все коэфф-ты целые!

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$ => $x^2+5x+3 = \left(x - \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x + \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$

2) Если взять $n > 2$, то нужно искать корни среди делителей числа 3; это ±1 и ±3 ...

Место для скобы

Шифр 003519

если $x=1$, то $(x^n+5x^{n-1}+3):(x-1)$

Поделим выражение столбиком:

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n-1}+3 & x-1 \\ -\ x^n-x^{n-1} & x^{n-1}+6x^{n-2}+6x^{n-3}\dots \\ \quad 6x^{n-1}+3 & \\ \quad -\ 6x^{n-1}-6x^{n-2} & \\ \qquad -6x^{n-2}+3 & \\ \qquad 6x^{n-2}-6x^{n-3} & \\ \qquad\quad 6x^{n-3}+3\dots & \end{array}$$

$\Rightarrow 6\neq 3 \Rightarrow$ $x=1$ не корень

3) Если $x=-1$, то $(x^n+5x^{n-1}+3):(x+1)$

Аналогично поделим столбиком и увидим:

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n-1}+3 & x+1 \\ -\ x^n+x^{n-1} & x^{n-1}+4x^{n-2}-4x^{n-3}+4x^{n-4}\dots \\ \quad 4x^{n-1}+3 & \\ \quad -\ 4x^{n-1}+4x^{n-1} & \\ \qquad -4x^{n-2}+3 & \\ \qquad 4x^{n-2}-4x^{n-2} & \\ \qquad\quad 4x^{n-3}+3 & \\ \qquad\quad -\ 4x^{n-3}+4x^{n-4} & \\ \qquad\qquad \dots -4x^{n-4}+3 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ числовой коэффициент у числа $x\neq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x=-1$ не корень

4) Если $x=3 \Rightarrow (x^n+5x^{n-1}+3):(x-3)$

Аналогично:

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n-1}+3 & x-3 \\ -\ x^n-3x^{n-1} & x^{n-1}+8x^{n-2}+24x^{n-3} \\ \quad -8x^{n-1}+3 & \\ \quad 8x^{n-1}-24x^{n-2} & \\ \qquad -24x^{n-2}+3 & \\ \qquad 24x^{n-2}-72x^{n-3} & \\ \qquad\quad \dots & \end{array}$$

$\Rightarrow$ числовой коэффициент увеличивается $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ деления происходить не будет.

5) И наконец, если $x=-3$, то $(x^n+5x^{n-1}+3):(x+3)$

Делим столбиком:

$$\begin{array}{l|l} x^n+5x^{n-1}+3 & x+3 \\ -\ x^n+3x^{n-1} & x^{n-1}+2x^{n-2}-6x^{n-3}+18x^{n-4}\dots \\ \quad 2x^{n-1}+3 & \\ \quad -\ 2x^{n-1}+6x^{n-2} & \\ \qquad -6x^{n-2}+3 & \\ \qquad 6x^{n-2}-18x^{n-3} & \\ \qquad\quad \dots & \end{array}$$

$\Rightarrow$

Место для скобы

Шифр

$\Rightarrow$ модуль числовых коэффициентов $\nearrow$ $\Rightarrow$ деления не на цело $\Rightarrow$ Общее: $f(x)$ в виде произведения при $n>2$ разложить никак нельзя.

Это возможно выполнить только при $n=2$, ч.т.д

Ответ: возможно при $n=2$

4

Найти все значения $\alpha>0$, при которых существуют ⊕ решения x неравенства:

$$\frac{x^3}{\alpha+\sqrt[3]{2020^{4}}\cdot x}+\frac{\sqrt{2020^{4}}\cdot x}{\alpha+x^3}\le\frac{3}{2}-\frac{\alpha}{x\cdot(x^2+\sqrt[3]{2020^{4}})}$$

4б

Ну, приступим. Выполним двойную замену:

$x^3=c$, а $\sqrt[3]{2020^4}\cdot x=b$, получим следующее неравенство:

$$\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}\le\frac{3}{2}-\frac{a}{b+c}$$, теперь перенесём ~~число~~ дробь с переменными влево, оставив $\frac{3}{2}$ справа:

$$\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}\le\frac{3}{2}$$, приведём все слагаемые слева к общему знаменателю:

$$\frac{c(a+c)(b+c)+b(a+b)(b+c)+a(a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}\le\frac{3}{2}$$, теперь всё будем перемножать $\rightarrow$

$$\frac{c(ab+ac+cb+c^2)+b(ab+ac+b^2+bc)+a(a^2+ac+ab+bc)}{(a+b)(a+c)(b+c)} \le \frac{3}{2}$$

$$\frac{\underline{abc}+ac^2+bc^2+c^3+ab^2+\underline{abc}+b^3+b^2c+a^3+a^2c+a^2b+\underline{abc}}{(a+b)(a+c)(b+c)} \le \frac{3}{2}$$

$$\frac{3abc+ac^2+bc^2+c^3+ab^2+b^3+b^2c+a^3+a^2c+a^2b}{(a+b)(a+c)(b+c)} \le \frac{3}{2}$$

По формуле числитель ~~свернётся~~ : и знаменатель свернутся:

$$\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \le \frac{3}{2}$$ нужно доказать!

? $$\frac{3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2(a+b+c)} \le \frac{3}{2}$$, для любых $a>0$ и т.д

5

Дано:

$S_{ABCD}=36$ кв. ед.

$AB+AC+CD=16$ ед.

d_2 - ?

Решение:

Рассм. выпуклый четырёхугольник ABCD

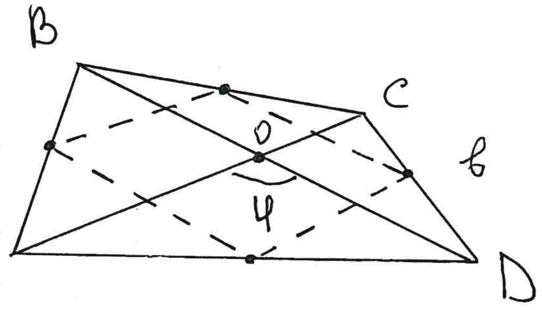
$S_{ABCD}=36$ кв. ед.

$AB+AC+CD=16$ ед.

$AC=16-(AB+CD)$.

Пусть $AB=a$, $CD=b$, тогда $BD=d_2$, $AC=d_1$.

Рассмотрим различные варианты событий:



Место для скобы

Шифр

1) Если вдруг ABCD – квадрат, то $S_{кв} = 32$ кв. ед. $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow AC = 8$

$AB + CD + AC = 8 + 8\sqrt{2} > 16 \Rightarrow$ ABCD – не квадрат.

2) $S_{чет.} = 32 = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi \Rightarrow d_1 d_2 \cdot \sin\varphi = 64 \Rightarrow$

$d_2 = \frac{64}{d_1 \cdot \sin\varphi}$

3) ~~Если ABCD – параллелограмм~~ $\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 16 \Rightarrow$
Если середины сторон ABCD дадут параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow d_2 < 16$

4) Если ABCD прямоугольный четырёхугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow d_1 = d_2 \Rightarrow AC = BD = 16 - (AB + CD)$.

Существует единств. решение. Оно не найдено.

3 б