07540

Шифр

...ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

...ет	Математика					
...нт	1					
	10					
...ия	ЕФАНОВ					
	РОМАН					
...во	АНАТОЛЬЕВИЧ					
...ождения	19		07		2006	
	Число		Месяц		Год	
	Россия					
... *(пр: Томская обл., ...нградская область)*	Кемеровская область					
...иципального образования *..., деревня, село, город)*	город					
...нный пункт *(пр: Томск, ...ово, Псков)*	Междуреченск					
... наименование ...зательного учреждения, ...ом Вы обучаетесь в ... время	МБОУ Лицей №20					

...сие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail ...ультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Ефанов

Шифр 07540

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
23	26.03		

Задача №1) Решение:

$y^3 - y^2x + 2y^2 - yx + 4y + 5x + 7 = 0$

$y^2(y - x + 1) + y^2 - yx - 4y + 5x + 7 = 0$

$y^2(y - x + 1) - 5(y - x + 1) + y^2 - yx + y + 12 = 0$

$y^2(y - x + 1) - 5(y - x + 1) + y(y - x + 1) = -12$

$(y^2 + y - 5)(y - x + 1) = -12$, т.к. $y \in Z$, $x \in Z$ => множители $\in Z$

1) $\begin{cases} y^2 + y - 5 = -1 \\ y - x + 1 = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ y - x + 1 = 12 \end{cases}$ т.к. $D = 1 + 16 = 17$ => решений $\in Z$ нет

1	2	3	4	5	Σ
7	4	7	5	0	23

2) $\begin{cases} y^2 + y - 5 = 1 \\ y - x + 1 = -12 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + y - 6 = 0 \quad (1) \\ x = y + 1 + 12 \end{cases}$

(1) $y^2 + y - 6 = 0$

$D = 25$

$y_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$

$y_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$

$x_1 = 15$

$x_2 = 10$

3) $\begin{cases} y^2 + y - 5 = 2 \\ y - x + 1 = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + y - 3 = 0 \\ y - x + 1 = 6 \end{cases}$ т.к. $D = 1 + 12 = 13$ решений $\in Z$ нет

4) $\begin{cases} y^2 + y - 5 = 2 \\ y - x + 1 = -6 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + y - 7 = 0 \\ y - x + 1 = -6 \end{cases}$ т.к. $D = 1 + 28 = 29$ решений в $\in Z$ нет

5) $\begin{cases} y^2 + y - 5 = 3 \\ y - x + 1 = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + y - 8 = 0 \\ y - x + 1 = -4 \end{cases}$ т.к. $D = 1 + 32 = 33$ реш $\in Z$ не

6) $\begin{cases} y^2 + y - 5 = -3 \\ y - x + 1 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + y - 2 = 0 \quad (1) \\ y - x + 1 = 4 \end{cases}$

(1) $y^2 + y - 2 = 0$ $D = 9$ => $y_1 = -2$; $y_2 = 1$

(2) $x = y + 1 - 4$ $x_1 = -5$; $x_2 = -2$

Продолжение на стр 2

7) $\begin{cases} y^2+y-5=6 \\ y-x+1=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2+y-11=0 \quad \text{т.к } D=1+44=45 \Rightarrow \text{реш-е} \notin Z \\ x=3+y \end{cases}$

8) $\begin{cases} y^2+y-5=-6 \\ y-x+1=2 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2+y+1=0, \quad \text{т.к } D<0 \Rightarrow \text{реш нет} \\ y-x+1=2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y^2+y-5=-12 \\ y-x+1=1 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2+y+7=0, \quad \text{т.к } D<0 \text{ реш нет} \\ y=x \end{cases}$

10) $\begin{cases} y^2+y-5=12 \\ y-x+1=-1 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2+y-17 \quad \text{т.к } D=69 \text{ реш} \notin Z \\ y-x+1=-1 \end{cases}$

Отв: ~~(2;15) (−~~ (15;2) (10;−3) (−5;−2) (−2;1)

Задача №2) Решение:

$\sin 3x = 1-\cos^2 3x = 1-A^2\sin^2 2x = B\cdot\cos 4x$

$1-A^2\cdot\sin^2 2x = B-2\cdot B\cdot\sin^2 2x$

$\Downarrow$

~~$\sin^2 2x = \frac{B-1}{2B}$~~

$\sin^2 2x(2B-A^2) = B-1$

$\sin^2 2x = \frac{B-1}{2B-A^2}$ ($2B \neq A^2$ в противном случае $0 = \sin^2 2x(2B-A^2)=0$ $\Downarrow$ $B-1=0 \Rightarrow B=1 \Rightarrow A=\sqrt{2}$ что невозможно по условию)

$\sin 3x = 1-A^2\cdot\sin^2 2x$

$\sin 3x = 1-A^2\cdot\frac{B-1}{2B-A^2}$

$\sin 3x = \frac{2B-A^2B}{2B-A^2}$

Продолжение на 3 ст.

Место для скобы

Шифр 07540

Пусть $B = \frac{m}{n}$, $A = \frac{p}{q}$ где $n, q \in \mathbb{Z} \neq 0$, $m, p \in \mathbb{Z}$

Тогда:

$$\sin 3x = \frac{2\frac{m}{n} \cdot \frac{p^2}{q^2} \cdot \frac{m}{n}}{2\frac{m}{n} - \frac{p^2}{q^2}} \quad (q^2 n$$

$$\sin 3x = \frac{m(2q^2 + p^2)}{2mq^2 - p^2 n}$$

$(2mq^2 \neq p^2 n$

$2\frac{m}{n} \neq \frac{p^2}{q}$

$2B \neq A^2)$

Т.к. $m, q, p, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$m(2q^2 - p^2) \in \mathbb{Z}$

$2mq^2 + p^2 n \in \mathbb{Z}$ и $\neq 0$

$\Rightarrow \sin 3x$ можно пред. в виде $\frac{l}{k} \Rightarrow$

$\sin 3x$ рациональное

ч.т.д.

Задача №3) Решение

$$\frac{a+b-c}{2c} + \frac{b+c-a}{2a} + \frac{a+c-b}{2b} \geq \frac{3}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} - 1 \geq 3$$

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 6$$

$(x-y)^2 \geq 0$

$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 \geq 2xy \quad | : xy$

$\Leftarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2 \\ &\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2 \\ &\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \end{aligned}\right\} +$$

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 6 \quad \text{ч.т.д.}$$

Задача №4) Решение:

$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$

$D = p^2 + \frac{2}{p^2}$

$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}}}{2}$

⇓

$x_1^4 + x_2^4 = \frac{\left(p - \sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}}\right)^4 + \left(p + \sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}}\right)^4}{16} = \frac{p^4 - 4p^3 \cdot \sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}} + 6p^2 \cdot \left(p^2 + \frac{2}{p^2}\right) - 4p\left(\sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}}\right)^3 + \left(p^2 + \frac{2}{p^2}\right)^2 + p^4 + 4p^3\sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}} + 6p^2\left(p^2 + \frac{2}{p^2}\right) + 4p\left(\sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}}\right)^3 + \left(p^2 + \frac{2}{p^2}\right)^2}{16} =$

$= \frac{2p^4 + 12p^2\left(p^2 + \frac{2}{p^2}\right) + 2\left(p^2 + \frac{2}{p^2}\right)^2}{16} = \frac{2p^4 + 12p^4 + 24 + 2p^4 + 8 + \frac{8}{p^4}}{16} =$

$= \frac{16p^4 + 32 + \frac{8}{p^4}}{16} = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq 2 + \sqrt{2}$ ч.т.д. неясно.

$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$

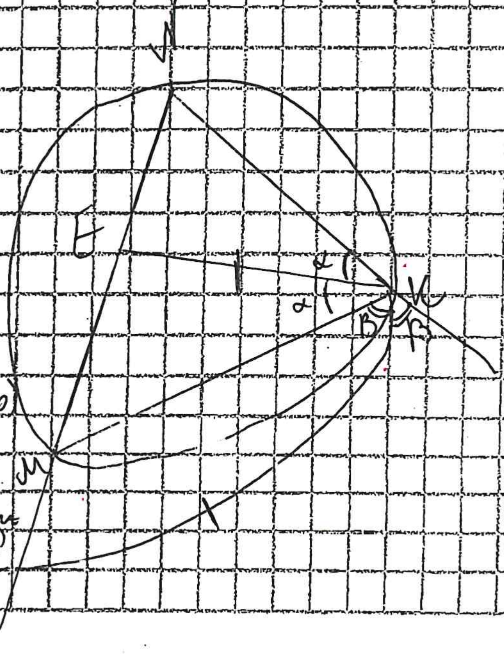
$\frac{2p^8 + 1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$

$2p^8 + 1 \geq \sqrt{2} \cdot 2p^4$

$2p^8 - \sqrt{2} \cdot 2p^4 + 1 \geq 0$

$(\sqrt{2}p^4 - 1)^2 \geq 0$ — верно $\Rightarrow p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$

Задача №5) Решение.



Если $MK^2 + NK^2 = 4R^2$

⇓

$\triangle MNK$ — прямоуг. $(\angle K = 90)$?

и MN как раз равно $2R$ как диаметр т.к. в прям. $\triangle$ диаметр опис. окр. $= 2R$

Тогда $\triangle EKF$ — прямоуг. $(2\alpha + 2\beta = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = 90)$ и р/б по условию. Т.к. $2\alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 45 = \beta$

KM — бис. $\triangle EKF \Rightarrow \angle M \perp MN$ что невозможно т.к. тогда в $\triangle MNK$ 2 угла $= 90°$