08156

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

дмет	МАТЕМАТИКА
иант	
с	11
илия	ДЗЮБА
	ИВАН
ство	АЛЕКСЕЕВИЧ
рождения	13 (Число) 07 (Месяц) 2005 (Год)
на	РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
он (*пр: Томская обл., нинградская область*)	ХАБАРОВСКИЙ КРАЙ
униципального образования *ет, деревня, село, город)*	ГОРОД
ленный пункт (*пр: Томск, рово, Псков)*	ХАБАРОВСК
ое наименование зовательного учреждения, ором Вы обучаетесь в ое время	МАОУ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ

ласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail езультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________________

Место для скобы

Шифр 08156

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
18	6.04	Коржикова Е.Е.	[illegible]

1	2	3	4	5	Σ
7	2	2	7	0	18

№1.

Произведем преобразования:

$$2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7y^2 - 42y + 33 =$$

$$= 2x^2(1+z^2) + z^2 + 1 + 7(y^2 - 6y + 9) - 31 =$$

$$= (2x^2+1)(1+z^2) + 7(y-3)^2 - 31 = 0.$$

след

$$(2x^2+1)(1+z^2) + 7(y-3)^2 = 31$$

Заметим, что все слагаемые в левой части уравнения положительны при любых $x, y, z \in R$, тогда попробуем подобрать значения для x, y, z: Воспользуемся таблицей. ~~$7(y-3)^2$~~ для целых x, y, z. при целых y выражение $7(y-3)^2$ принимает значения $(0; 7; 28)$ ~~при y~~, меньше 31, тогда

[illegible]

имеем

$$\left[\begin{array}{ll} (1) & (2x^2+1)(1+z^2) = 31;\ y=3 \\ (2) & (2x^2+1)(1+z^2) = 3;\ y=5;1 \\ (3) & (2x^2+1)(1+z^2) = 24 \end{array}\right.$$

Решим каждое уравнение отдельно.

1) $(2x^2+1)(1+z^2) = 31.$

31 — простое число, след $x^2 = 0$ или $z^2 = 0$, тогда $2x^2+1 = 31$ или $z^2+1 = 31$, однако

Место для скобы

Шифр 08156

это невозможно, так как числа 15 и 30 - не являются полными квадратами

2) аналогично первому, $x=0$ или $y=0$, при этом $2x^2+1=3$ или $z^2+1=3$, т.к. 2 - не является полным квадратом, то имеем ед. решение при $z=0$ и $x=\pm1$

2 вывод: $(\pm1; 5$ или $1; 0)$

3) найдем ~~значения~~ возможные значения $2x^2+1$ и $1+z^2$: $z^2+1 \in \{1; 2; 5; 10; 17\}$ (меньше 24)

$2x^2+1 \in \{1; 3; 9; 19\}$ т.к. $24 = 3 \cdot 2^3$, то ни одна пара значений из предложенных не подходит, т.к. макс. степень двойки, являющаяся делителем числа $(2x^2+1)(z^2+1)$ равна 1, если это число ~~меньше~~ 24 меньше 24.

Ответ: $(1; 5; 0); (-1; 5; 0); (1; 1; 0); (-1; 1; 0)$.

№4

преобразуем выражение: $(x_1+x_2+x_3) \cdot \left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) = \frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3} \cdot (x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)$

Воспользуемся развернутой теоремой Виета, по ней: $x_1+x_2+x_3 = \frac{-(-a)}{a}$; $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = \frac{+b}{a}$, и $x_1x_2x_3 = \frac{-b}{a}$.

Место для скобы

Шифр 08156

№4. продолжение.

тогда $\frac{(x_1+x_2+x_3)}{x_1x_2x_3}\cdot(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=\frac{a}{d}\cdot\frac{b}{d}\cdot\frac{a}{(-b)}=$

$=-1$ ч.т.д.

?

№3.

заметим, что по неравенству Коши:

$\frac{b+c}{2}\geqslant\sqrt{bc}$, следовательно $\frac{2a}{3(b+c)}\leqslant\frac{a}{3\sqrt{bc}}$,

аналогично $\frac{2b}{3(a+b)}\leqslant\frac{b}{3\sqrt{ac}}$ и $\frac{2c}{3(a+b)}\leqslant\frac{c}{3\sqrt{ab}}$,

тогда $\frac{2a}{3(b+c)}+\frac{2b}{3(a+c)}+\frac{2c}{3(a+b)}\leqslant\frac{a}{3\sqrt{bc}}+\frac{b}{3\sqrt{ac}}+\frac{c}{3\sqrt{ab}}$,

заметим, что $\frac{a}{3\sqrt{bc}}+\frac{b}{3\sqrt{ac}}+\frac{c}{3\sqrt{ab}}=\frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}\right)$

по неравенству Коши: $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{3}\geqslant$

$\geqslant\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{abc}$, следовательно

$\frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}\right)\geqslant 1$, следовательно

№2.

пусть $t=\lg(x^2-2023)$, тогда

$x^2-2022=10^t+1$; рассмотрим функцию

$f(t)=2^t-\lg 2\cdot(10^t+1)$; заметим, что

$f'(t)=2^t\cdot\ln 2-\lg 2\cdot 10^t\cdot\ln 10=2^t\ln 2-10^t\ln 2=$

$=\ln 2\cdot(2^t-10^t)$; уравнение $2^t-10^t=0$ достигается

только при $t=0$; при $t>0$ производная

отрицательна, при $t<0$ $f'(t)>0$, след

обоснуйте

$\ln 10$ где?

Место для скобы

Шифр 08156

т.к функция монотонно возрастает при $t<0$ и монотонно убывает при $t>0$, то она может иметь не более двух корней.

т.к $f(0) = 2^0 - \lg 2 \cdot (10^0+1) = 1 - 2\lg 2 =$
$= 1 - \lg 4$, т.к $4<10$, то $0<\lg 4<1$, след $f(0)>0$, отсюда следует то, что уравнение имеет два корня

Ответ: 2 корня

№3.

~~представим $1 = \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{a+b}{3(a+b)} + \frac{b+c}{3(b+c)} + \frac{a+c}{3(a+c)}$~~
~~и перенеся 1 в левую часть неравенства получим: $\frac{2a-b-c}{3(b+c)} + \frac{2b-a-c}{3(a+c)} + \frac{2c-a-b}{3(a+b)} =$~~

~~По неравенству Коши: перепишем~~

~~$\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2c}{3(a+b)} \geq \sqrt[3]{\frac{8abc}{(b+c)(b+a)(a+b)}}$~~
~~Докажем, что $abc \geq \frac{(b+c)(b+a)(a+b)}{8}$~~

представим $1 = \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{a+b}{3(a+b)} + \frac{b+c}{3(b+c)} + \frac{a+c}{3(a+c)}$
и перенесем в левую часть:
$\frac{2a-b-c}{3(b+c)} + \frac{2b-a-c}{3(a+c)} + \frac{2c-a-b}{3(a+b)}$?, пусть $c \geq b \geq a$, не теряя общности, т.к неравенство симметрично отн. переменных, тогда $\frac{2c-a-b}{3(a+b)} \geq 0$, при этом знаменатель меньший,

4 страница

Место для скобы

Шифр

~~тогда~~ рассмотрим сумму

$$\frac{2a-b-c}{3(b+c)}+\frac{2b-a-c}{3(a+c)}=\frac{-(a+b+c)}{}$$

преобразуем неравенство к виду:

$$-\frac{(a+b+c)}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

Заметим, что ~~отрицательная~~ часть ~~левая~~ со знаком минус равна среднему значению $(a;b;c)$; которое меньше либо равно c $\quad -\frac{(a+b+c)}{3}\leq c$;

т.к. у дроби $\frac{c}{a+b}$ знаменатель.