Место для скобы

**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»**
**ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ**
**заключительного этапа**

03361

**Шифр**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Предмет | МАТЕМАТИКА |
| 2. | Вариант | 1 |
| 3. | Класс | 11 |
| 4. | Фамилия | ДЯДИЧЕНКО |
| | Имя | ЮЛИЯ |
| | Отчество | МИХАЙЛОВНА |
| 5. | Дата рождения | Число: 02; Месяц: 07; Год: 2004 |
| 6. | Страна | |
| 7. | Регион *(пр: Томская обл., Калининградская область)* | Кемеровская область |
| 8. | Вид муниципального образования *(пр: пгт, деревня, село, город)* | город |
| 9. | Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)* | Междуреченск |
| 10. | Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время | Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение „Средняя общеобразовательная школа №25" |

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

*Личная подпись* Дяд

Шифр 03361

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
| --- | --- | --- | --- |
| 24 | 28.03 | Корякина Е.Е. | |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 7 | 0 | 3 | 7 | 7 | 24 |

№4 Рассмотрим многочлен $p(x) = x^3 - 2022x^2 + 0x + 1011$

Он имеет не более 3 корней. По условию числа a, b и c различны, причем $p(a) = p(b) = p(c) = 0$. Значит a, b и c – корни многочлена $p(x)$

Воспользуемся теоремой Виета

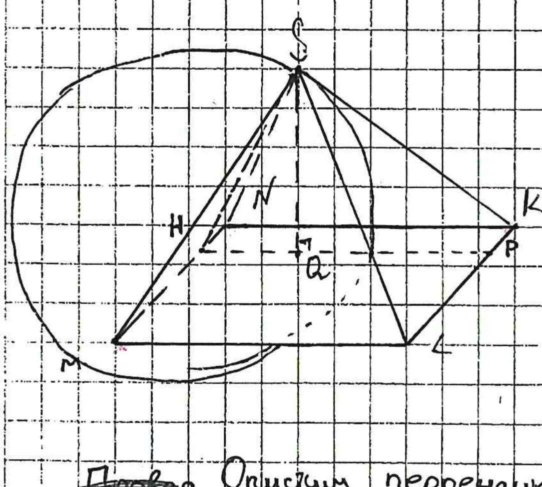
$$\begin{cases} 2022 = x_1 + x_2 + x_3 = a+b+c \\ 0 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = ab+bc+ac \\ -1011 = x_1x_2x_3 = abc \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3$ – корни многочлена

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{c+a+b}{abc} = \frac{2022}{-1011} = -2$$

+

№5




?

$MN = 5$; $NK = 2$; $SM = 3$; $SN = 4$

Заметим, что $\triangle SMN$ – прямоуг, т.к. $MN^2 = SM^2 + SN^2$

?

Проведем в нём высоту SH и $HP \parallel NK$

~~Провед~~ Опустим перпендикуляр SQ на HP

Заметим, что $MN \perp SH$ и $MN \perp HP \Rightarrow MN \perp (SHP) \Rightarrow MN \perp SQ$. Т.к. $SQ \perp MN$ и $SQ \perp HP$, то $SQ \perp (MNK)$, т.е. SQ – высота пирамиды

$$V_п = \frac{1}{3} \cdot SQ \cdot S_{MNKL} = \cancel{\frac{1}{3} \cdot \frac{MN \cdot NK}{2} \cdot SQ} = \frac{1}{3} MN \cdot NK \cdot SQ = \frac{10}{3} \cdot SQ$$

..места скобы

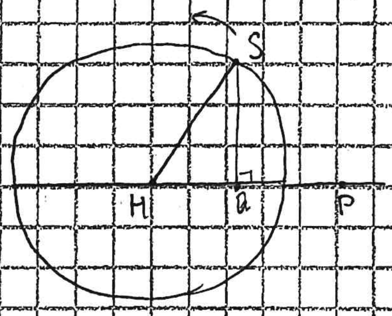
Шифр 03361

Мы получили, что объем пирамиды зависит только от высоты SQ, т.е. нужно найти её max значение.

~~Построим окружность с радиусом SH~~

Построим окружность радиуса SH, содержащую прямую HP (H-центр)

Начнем перемещать точку S по окружности, увеличивая $\angle SHP$

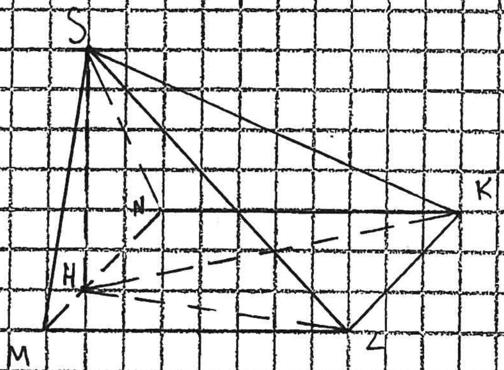



SQ примет max значение, когда совпадет с SH, т.е. станет равным радиусу окружности (понятно, что расстояние точки окружности до диаметра не может быть больше радиуса)

$SQ_{max} = SH = \frac{MS \cdot SN}{MN}$ (т.к. $S_\Delta = \frac{MS \cdot SN}{2}$ и $S_\Delta = \frac{SH \cdot MN}{2} \Rightarrow MS \cdot SN = SH \cdot MN$)

$SQ = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2{,}4$

$V = \frac{10}{3} \cdot 2{,}4 = 8$




В $\Delta SHN$ $HN = \sqrt{SN^2 - SH^2} = \sqrt{10{,}24} = 3{,}2$

$MH = MN - HN = 5 - 3{,}2 = 1{,}8$

$\Delta HNK$ прямоуг. $HK = \sqrt{HN^2 + NK^2} = \sqrt{10{,}24 + 4} = \sqrt{14{,}24}$

Т.к. SH высота пирам., то $SH \perp HK$

$\Delta SHK$ прямоуг $SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \sqrt{5{,}76 + 14{,}24} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

~~$SH \perp HL \Rightarrow \Delta SH$~~ $\Delta MHL$ прямоуг $HL = \sqrt{MH^2 + ML^2} = \sqrt{3{,}24 + 4} = \sqrt{7{,}24}$

$SH \perp HL$, $\Delta SHL$ прямоуг $SL = \sqrt{SH^2 + HL^2} = \sqrt{5{,}76 + 7{,}24} = \sqrt{13}$

Ответ: $SK = 2\sqrt{5}$, $SL = \sqrt{13}$, $V = 8$

МЕСТО скобы

Шифр 03361

№1 Докажем, что $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=\frac{n!-1}{n!}$

Воспользуемся методом мат. индукции

База: для $n=2$

$\frac{1}{2!}=\frac{2!-1}{2!}$ – верно

Переход: пусть формула верна для всех ~~значений~~ натуральных значений до $n=K$. Рассмотрим $n=K+1$

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{K-1}{K!}+\frac{K}{(K+1)!}=\frac{K!-1}{K!}+\frac{K}{(K+1)!}=\frac{(K!-1)(K+1)+K}{(K+1)!}=\frac{(K+1)!-K-1+K}{(K+1)!}=\frac{(K+1)!-1}{(K+1)!}$$

Переход верен. Значит формула верна

$$S_{2021}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{2021}{2022!}=\frac{2022!-1}{2022!}$$

$$2022!\,(S_{2021}-1)=2022!\left(\frac{2022!-1}{2022!}-1\right)=2022!\cdot\left(\frac{2022!-1-2022!}{2022!}\right)=2022!-1-2022!=$$

$=-1$

Ответ: $-1$

№3 $p(x)=x^2+3x+2$. По Т Виета найдем корни: $x_1=-1$, $x_2=-2$

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. Тогда

$$\left(1-\frac{2}{p(1)}\right)\left(1-\frac{2}{p(2)}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{p(3)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{p(2021)}\right)=\left(1-\frac{2}{2\cdot3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot4}\right)\left(1-\frac{2}{4\cdot5}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{2022\cdot2023}\right)$$

Заметим, что в каждой скобке второе слагаемое является числом обратным сумме нат. чисел от 1 до $(x+1)$. Сокращая дроби на 2 в знаменателе получим значение суммы от 1 до $(x+1)$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\frac{2022\cdot2023}{2}}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}\cdot\ldots\cdot\frac{\frac{2022\cdot2023}{2}-1}{\frac{2022\cdot2023}{2}}$$