Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004270

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	10
4.	Фамилия	ДЬЯЧКОВСКИЙ
	Имя	МИХАИЛ
	Отчество	АФАНАСЬЕВИЧ
5.	Дата рождения	Число: 27; Месяц: 01; Год: 2004
6.	Страна	РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	респ. Саха (Якутия)
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Якутск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБНОУ „Республиканский лицей-интернат" с УИОП

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________

скобы

Шифр 004270

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
35б	5.04.21	Гендрино И.Ю.	[illegible]

Задача 3.

Общий вид квадратного трёхчлена:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$f(0) + f(1) = 0 \Leftrightarrow a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c + a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c = 0$ 7б

$$a + b + 2c = 0 \quad (1)$$

$f(2) + f(3) = 0 \Leftrightarrow a\cdot 4 + b\cdot 2 + c + a\cdot 9 + b\cdot 3 + c = 0$

$$13a + 5b + 2c = 0 \quad (2)$$

$f(x) = 2020 \Leftrightarrow ax^2 + bx + (c - 2020) = 0$

1	2	3	4	5
7	7	7	7	7

По теореме Виета:

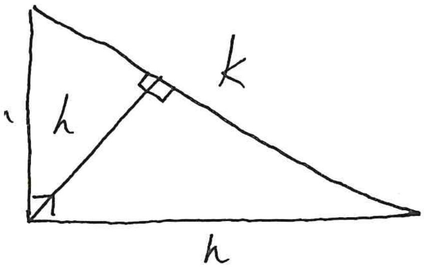
$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c - 2020}{a}$

$(2) - (1)$: $12a + 4b = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0 \Leftrightarrow b = -3a$

$x_1 + x_2 = -\dfrac{-3a}{a} = 3$ ✓

Ответ: $x_1 + x_2 = 3$

Задача 5.



$S_{треуг.} = \dfrac{1}{2}\cdot m \cdot n = \dfrac{1}{2}\cdot h \cdot k$

$$mn = hk \quad (1)$$

Допустим, что $k + h < m + n$

Возведём это неравенство в квадрат с обеих сторон:

$k^2 + 2kh + h^2 < m^2 + 2mn + n^2$

$2kh = 2mn$ по (1) $\Rightarrow k^2 + h^2 < m^2 + n^2$ 7б

По теореме Пифагора: $m^2 + n^2 = k^2 \Rightarrow h^2 < 0$, но если треугольник есть и обладает площадью $\neq 0$, то $h^2 > 0$ – противоречие $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ наше начальное мнение ошибочно и $k + h < m + n$ – невозможно.

Ответ: нет, невозможно ✓

скобы

Шифр 004270

2 задача

$$\begin{cases} 5xy + yz + 2xz = -x \ (1) \\ 14xy + 3yz + 5xz = -4x \ (2) \\ 2xy + xz = 4x \ (3) \end{cases}$$

Рассмотрим (3):

$x(2y+z) = 4x$

Проверим является ли $x=0$ частным решением системы:

(1): $yz = 0 \Rightarrow y=0,\ z \in R$

$z=0,\ y \in R$

(2): $3yz = 0$ аналогично

Получим два решение при $x=0$. Теперь предположим, что $x \neq 0$

Тогда (3):

$x(2y+z) = 4x \ | : x\neq 0 \Leftrightarrow 2y+z = 4 \ (4)$

Умножим (1) на 4:

$20xy + 4yz + 8xz = -4x = 14xy + 3yz + 5xz$

$6xy + yz + 3xz = 0$ по (4)

$3x(2y+z) + yz = 0 \Rightarrow 3x \cdot 4 + yz = 0$

$yz = -12x \ (5)$

Подставим (5) в (1) и (2):

$$\begin{cases} 5xy + (-12x) + 2xz = -x \Rightarrow 5xy + 2xz = 11x \ (1') \ | : x \neq 0 \\ 14xy + 3\cdot(-12x) + 5xz = -4x \Rightarrow 14xy + 5xz = 32x \ (2') \ | : x\neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y + 2z = 11 \Rightarrow 2z = 11 - 5y \Leftrightarrow z = \frac{11-5y}{2} \ (6) \\ 14y + 5z = 32 \end{cases}$$

$14y + 5\cdot\frac{11-5y}{2} = 32 \Leftrightarrow 14y + \frac{55}{2} - \frac{25y}{2} = 32$

$\frac{3y}{2} = \frac{9}{2} \ | \cdot \frac{2}{3}$ $\boxed{y = 3}$

(6): $z = \frac{11-5\cdot 3}{2} = \boxed{-2}$

(5): $yz = -12x \Rightarrow 3\cdot(-2) = -12x \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

Ответ: $(x=0,\ y=0,\ z\in R),\ (x=0,\ y\in R,\ z=0),\ (x=\frac{1}{2},\ y=3,\ z=-2)$

7б

скобы

Шифр 004270

4 задача.

$$\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{\cancel{2021}\,2021\cdot 2019^{-1}}>2 \quad (1)$$

Вспомним неравенство о средних:

$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{a\cdot b}$, причем если $a=b$, то $\frac{a+b}{2}=\sqrt{a\cdot b}$:

$$\boxed{\begin{aligned}&a+b=2\sqrt{ab}\\&a^2+2ab+b^2=4ab\\&(a-b)^2=0\\&a=b\end{aligned}}$$

Пусть $\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}=a$, $\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}=b$

Докажем его:

$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ Возведём в квадрат обе стороны:

$a^2+2ab+b^2\geqslant 4ab$

$a^2-2ab+b^2\geqslant 0$

$(a-b)^2\geqslant 0$ - это всегда верно => верно и начальное утверждение

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}\cdot 2021\cdot 2019^{-1}}}=\sqrt[4040]{2020\cdot 2019^{-1}}=\left(\frac{2020}{2019}\right)^{\frac{1}{4040}}$$

Рассмотрим функцию $f(x)=a^x$. Докажем её монотонное возрастание:

~~нужно доказать: $a^{x+\Delta x}>a^x$, где $a>1$, $\Delta x>0$.~~

~~По свойству степени: $a^x\cdot a^{\Delta x}-a^x>0$~~

~~$a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)>0$~~

$$f'(x)=(a^x)'=\left(e^{\ln a x}\right)'=e^{\ln a\cdot x}\cdot\ln a=\ln a\cdot a^x$$

Нам известно, что $\ln a>0$, т.к. $a>1$, $a^x>0$ - из области значений показательной функции, т.е. $f(x)=a^x$ имеет положительную производную в любой точке $x\in\mathbb{R}$ => она монотонно возрастает

$\frac{2020}{2019}>1$; $\frac{1}{4040}>0$; $\left(\frac{2020}{2019}\right)^{\frac{1}{4040}}>\left(\frac{2020}{2019}\right)^0=1$ =>

=> $\frac{a+b}{2}>1$; $a+b>2$ - что и требовалось доказать

15

скобы

Шифр 4270

1 задача

Как известно, что сумма, разность, произведение целых чисел тоже является целым числом. Предположим, что все три числа целые и есть такое x:

$$\sqrt{x^2+2020}-x=z_1;\quad \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020}=z_2;\quad 2x-\sqrt{x^2+2020}=z_3$$

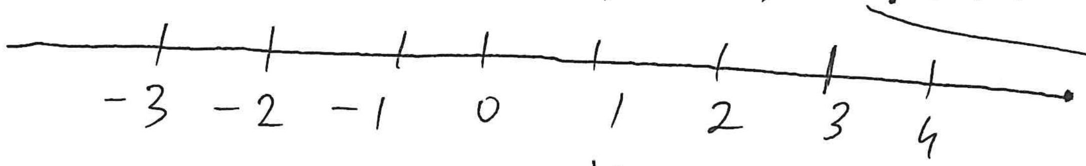
$z_1+z_2=x$ — сумма целых чисел $\Rightarrow x\in\mathbb{Z}$

$\sqrt{x^2+2020}=x+z_1$ — сумма целых чисел $\Rightarrow \sqrt{x^2+2020}\in\mathbb{Z}$

$\sqrt{x^2+2}=z_2+\sqrt{x^2+2020}$ — сумма целых чисел $\Rightarrow \sqrt{x^2+2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+2$ — полный квадрат. Иначе: $x^2+2=a^2$, $a=\sqrt{x^2+2}$

$a^2-x^2=2 \Leftrightarrow (a-x)(a+x)=2$. Ось целых чисел:



$|(a-x)(a+x)|=2$, не забываем что и a, и $x\in\mathbb{Z}$

~~Допустим $|a|>2$, тогда: 1) $a>2$: а) $x>a$: $x>a>2$, $x>2$, $a>2$, $a+x>4\Rightarrow$ т.к. $|a-x|_{min}=1$, то $|(a+x)(a-x)|\neq 2$~~

~~б) $x<a$: $\left.\begin{matrix}a>x\\a>2\end{matrix}\right\}\Rightarrow a-x>0$~~

~~$|a-x|=2$ либо $|a-x|=1$, если $|a-x|>2$, то $|(a-x)(a+x)|>2$~~

~~т.к. $a+x$~~

~~Ось квадратов бессмысленно рисовать~~

$a-x\in\mathbb{Z}$, $a+x\in\mathbb{Z}\Rightarrow |a-x|_{max}=2$, т.к. если $|a-x|>2$, то из-за того, что $|a+x|_{min}=1$, соотношение $|(a-x)(a+x)|=2$ не выполнится. То есть: $|a-x|$ либо 1, либо 2, $|a+x|$ либо 2, либо 1:

1) $a-x=1\Rightarrow a=x+1$ а) $a+x=2$ $2x+1=2$ $2x=1$ $x=\frac{1}{2}$, но $x\in\mathbb{Z}$ — противоречие

б) $-(a+x)=2$ $-2x-1=2$ $-2x=3$ $x=-\frac{3}{2}$, но $x\in\mathbb{Z}$ — противоречие

Место для скобы

Шифр

2) ~~a+x~~ $a-x=-1 \Rightarrow a=x-1$ а) $a+x=2$ $2x-1=2$ $x=\frac{3}{2}$, но $x\in\mathbb{Z}$ – противореч

б) $-(a+x)=2$ $-2x+1=2$ $x=-\frac{1}{2}$, но $x\in\mathbb{Z}$ – противоречие

3) $a-x=2 \Rightarrow a=x+2$ а) $x+a=1$ $2x+2=1$ $2x=-1$ $x=-\frac{1}{2}$, но $x\in\mathbb{Z}$ – противоречие

б) $-(x+a)=1$ $-2x-2=1$ $x=-\frac{3}{2}$, но $x\in\mathbb{Z}$ – противоречие

4) $a-x=-2 \Rightarrow a=x-2$ а) $x+a=1$ $2x-2=1$ $2x=3$, $x=\frac{3}{2}$, но $x\in\mathbb{Z}$ – противоречие

б) $-(x+a)=1$ $-2x+2=1$ $-2x=-1$ $x=\frac{1}{2}$, но $x\in\mathbb{Z}$ – противоречие

Мы рассмотрели все случаи и везде получили то, что $a^2-x^2=2$ не выполняется ни при каких целых a и $x \Rightarrow$ $\Rightarrow$ наше начальное предположение неверно $\Rightarrow$ a и x не могут быть оба целыми $\Rightarrow$ все три начальных выражения не могут быть целыми $\Rightarrow$ не существует такого x.

Ответ: нет, не существует.