



Место для скобы

Шифр 04261

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
175	6.04.11	Женщина И.О.	<i>[Signature]</i>

N1

Нет, не существует. Раз нам нужно, чтобы  $x$  удовлетворял всем выражениям, рассмотрим  $x - \frac{1}{x}$ .  
 $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$  Очевидно что пары чисел  $x+1$  и  $x$ ,  $x-1$  и  $x$  будут

разной четности, то есть  $x-1$  и  $x+1$  будут одной четности, а  $x$  - другой. Тогда с учетом  $x \neq 0$  будет всего 2 числа, удовлетворяющие  $\frac{(x-1)(x+1)}{x} \in \mathbb{Z}$  это -1 и 1. Подставим найденные значения

в первое выражение  $(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + 2020}) : 1 - \frac{1}{2021}$  и  $-1 - \frac{1}{2021}$   
~~2~~ ~~7~~

Нет, не существует.

N2

$\sin x + \sin^3 x + 2021 \sin^5 x = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2021 \cos^5(2x)$  Пусть  $\sin x = a$   
 $\cos 2x = b$

$a + a^3 + 2021a^5 = b + b^3 + 2021b^5$  в силу несхожести степеней очевидно, что корни являются  $a=b$ :

Пусть  $a=b$ , тогда  $a^3 = b^3$   
 Тогда  $a^5 = b^5$  (2021)  $\Rightarrow$  все члены равны, значит  $a=b$  - корень.  
 Тогда  $2021a^5 = 2021b^5$

$a=b$   
 $\sin x = \cos 2x$

$\sin x = 1 - 2\sin^2 x$   
 $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

По т. Виета  $\begin{cases} \sin_1 x = -1 \\ \sin_2 x = \frac{1}{2} \end{cases}$   
 $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{Z}$  Ответ:  $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m \end{cases} \quad n, m \in \mathbb{Z}$

1	2	3	4	5
7	6	4	0	0

60

Шифр - один.

N3.

Если  $p(t)$  представляется в виде тричлена с положительными коэффициентами, то корни уравнения  $p(t) = 0$  будут отрицательными.

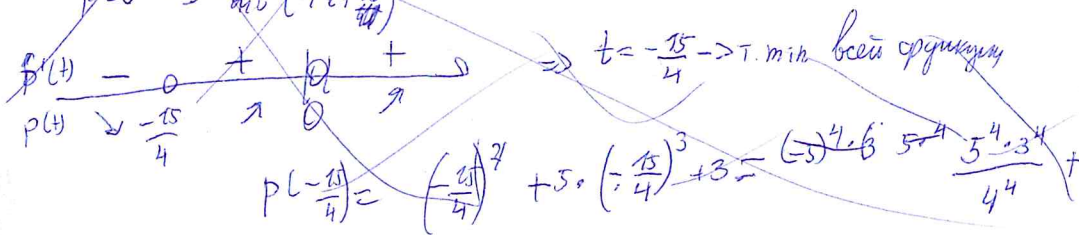
Докажем, что это не так.

~~$n=4$~~

~~$p(t) = t^4 + 5t^3 + 3 = 0$~~

~~$p'(t) = 4t^3 + 15t^2 = 4t^2(4t + 15) = 0$~~

~~$t = -\frac{15}{4} \rightarrow \text{т. мин. всей функции}$~~



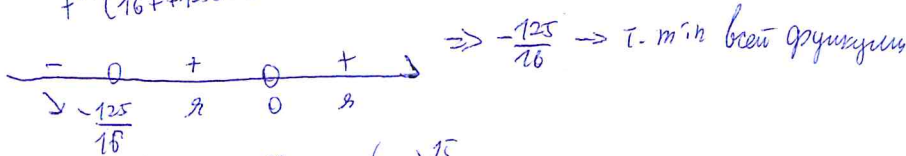
$n=16$

$t^{16} + 5t^{15} + 3 = 0$

$p'(t) = 16t^{15} + 15t^{14} = 0$

$16t^{15} + 15t^{14} = 0$

$t^{14}(16t + 15) = 0$



$p(-\frac{125}{16}) = (-\frac{125}{16})^{16} - 5 \cdot (\frac{125}{16})^{15} + 3 = 0$

сравним числа  $(\frac{125}{16})^{16} \stackrel{?}{>} 5 \cdot (\frac{125}{16})^{15} \Rightarrow (\frac{125}{16})^{15}$

$\frac{125}{16} \stackrel{?}{>} 5$

$5 + \frac{45}{16} > 5$

Делит только  
если разложить на  
целые.

45

$\Rightarrow p_{\min} = p(-\frac{125}{16}) > 0 \Rightarrow$  невозможно  
разложить на целые при  $n=16 \Rightarrow$   
невозможно разложить ~~на~~.

Место для  
скобы

Шифр 004261

N4

$$\frac{x^3}{k + \sqrt[3]{2021^4} x} + \frac{\sqrt[3]{2021^4} x}{k + x^3} \leq \frac{3}{2} - \frac{k}{x(x^2 + \sqrt[3]{2021^4})}$$

$$\frac{b}{k+a} + \frac{a}{k+b} \leq \frac{3}{2} - \frac{k}{a+b}$$

Пусть  $\sqrt[3]{2021^4} \cdot x = a$   
 $x^3 = b$

$$\frac{a^3 + b^3 + k^3 + a^2(k+b) + b^2(k+a) + k^2(a+b) + 3akb}{(k+a)(a+b)(k+b)} \leq \frac{3}{2}$$

05