Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ОРМОМ6-12

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	9
4.	Фамилия	Д О Л Г О П О Л О В А
	Имя	А Л Е К С А Н Д Р А
	Отчество	В Л А Д И М И Р О В Н А
5.	Дата рождения	1 0 (Число) 1 0 (Месяц) 2 0 0 5 (Год)
6.	Страна	Российская Федерация
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Свердловская область
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Екатеринбург
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение лицей №135

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ______

Место для скобы

Шифр ОРМОМ6-12

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
28		Правилкина Т.А.	[signature]

① $\frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-ab+b^2}-\frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2}$

Рассмотрим каждую дробь: $\frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-ab+b^2}=\frac{2ab(a^3+b^3)}{a^2-ab+b^2}=$

$=\frac{2ab(a+b)\cancel{(a^2-ab+b^2)}}{\cancel{a^2-ab+b^2}}=2ab(a+b)$

минус на минус = +

$-\frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2}=-\frac{-(a^4-b^4)(b+a)}{a^2-b^2}=\frac{\cancel{(a^2-b^2)}(a^2+b^2)(a+b)}{\cancel{a^2-b^2}}=(a^2+b^2)(a+b)$

Получаем: $2ab(a+b)+(a^2+b^2)(a+b)=(a+b)(a^2+b^2+2ab)=(a+b)(a+b)^2=$

$=(a+b)^3=-3^3=-27$

$-1{,}7\ldots77+(-1{,}2\ldots23)=-1{,}7\ldots77-1{,}2\ldots23=-3$

$$\begin{array}{r} 1{,}7\ldots77 \\ +\ 1{,}2\ldots23 \\ \hline 3{,}0\ldots00 \end{array}$$

Ответ: -27 ✓ 7

② $\begin{cases} x^2+2y^2-2yz=900 \\ 2xy-z^2=900 \end{cases}$ значения равны, приравняем левые части

$x^2+2y^2-2yz=2xy-z^2$

$x^2+2y^2-2yz-2xy+z^2=0$

$(x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)=0$

$(x-y)^2+(y-z)^2=0$ сумма квадратов $=0$, когда каждый квадрат равен 0

$x-y=0$ $y-z=0$

$x=y$ $y=z$

$x=y=z$ Подставим x для всех переменных в любое ур-е системы

Место для скобы

Шифр ОРМОМ6-12

(2) продолжение! Подставим x в ур-е системы

$x^2+2x^2-2x^2=900$ $\quad$ $2x^2-x^2=900$

$x^2=900$ $\quad$ $x^2=900$

$x=\pm 30$ $\quad$ $x=\pm30$

Тогда возможно только 2 комбинации! $x=30$, $y=30$, $z=30$; $x=-30$, $y=-30$, $z=-30$

Ответ: $x=30$, $y=30$, $z=30$; $x=-30$, $y=-30$, $z=-30$

7

(3) $y=x^2+ax+b$ $\quad$ $y=x^2+cx+d$

$1=1+a+b$ $\quad$ $1=1+c+d$

$a+b=0$ $\quad$ $c+d=0$

$a+b=c+d$ => при возведении в одинак. степень равенство сохранится

$a^{2023}+b^{2023}=c^{2023}+d^{2023}$, но $a^{2023}+b^{2023}>\frac{c^{2023}}{c^3}+\frac{d^{2023}}{d^3}$ <=> $a^{2023}+b^{2023}>c^{2020}+d^{2020}$

Рассмотрим нер-во: $a^{2023}+d^{2020} < c^{2020}-b^{2023}$ <=> $a^{2023}+b^{2023}<c^{2020}-d^{2020}$

Сумма $a^{2023}+b^{2023}$ больше суммы $c^{2020}+d^{2020}$, но в выражении мы имеем разность $c^{2020}-d^{2020}$, которая точно меньше $c^{2020}+d^{2020}$ =>

=> получается $a^{2023}+b^{2023}>c^{2020}-d^{2020}$, и равенство с противоположным знаком не выполняется.

Также стоит отдельно рассмотреть равенства $a+b=0$ $c+d=0$, из этих равенств получим $a=-b$ $c=-d$, тогда сумма $a^{2023}+b^{2023}=0$ (степень одинакова => => значение тоже)

Любое число в четн. степени даёт „+" число, тогда разность $c^{2020}-d^{2020}$ <=> $c^{2020}=d^{2020}$, тоже равна 0, т.к. 2020 степени равны. И неравенство из задания снова не выполняется

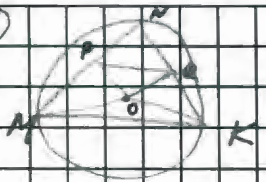
Ответ: нет, невозможно

знака противоположна рав-во выпол

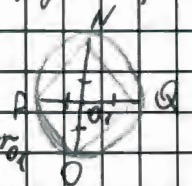
7

Место для скобы

Шифр OPMOM6-12

(5) 

По условию $\angle MOK = 2\angle POQ$, $\angle PNQ$ опирается на дугу $\cup MK$, он вписанный $\Rightarrow \angle PNQ = \frac{1}{2}\cup MK$, но $\angle POQ = \frac{1}{2}\cup MK \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PNQ = \angle POQ$. Эти два угла также опираются на один отрезок $\Rightarrow$ по св-ву вокруг вершин равных углов и концов отрезка можно описать окр-ть: 

При этом $ON = d$ окр-ти с центром O_1, $NQ = QQ = O_1O = O_1P = r_{O_1}$ а также $ON = r$ окр-ти O

По св-ву, если четырехуг. можно вписать в ок-ть сумма противоп. углов $= 180°$, тогда $\angle PNQ = \angle POQ = 90°$, тогда и $\angle NPO = \angle NQO = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow OPNQ$ — прямоугольник

Вернемся к $\angle MOK = 2\angle PNQ \Rightarrow \angle MOK = 180°$, тогда MK — диаметр $MK = 2r$ ок-ти O

Теперь рассмотрим чему равно NQ, по теореме косинусов $NQ = \sqrt{O_1N^2 + O_1N^2 \cdot \cos\alpha} = \sqrt{2O_1N^2 - O_1N^2\cos\alpha} = \sqrt{O_1N^2(2-\cos\alpha)} = O_1N \cdot \sqrt{2-\cos\alpha}$

Оценим выражение $2-\cos\alpha$: $\cos\alpha \le 1 \Rightarrow 2-\cos\alpha \ge 1 \Rightarrow \sqrt{2-\cos\alpha} \ge 1$, тогда $NQ = O_1N \cdot (\ge 1) \Rightarrow NQ \ge O_1N \Rightarrow NQ \ge r(O_1)$

Проведем тоже самое с NP, получим тот же результат $NP \ge r(O_1)$

Тогда $P(PNQ) = PN + NQ + PQ$, учитывая, что $r(O_1) = \frac{1}{2}r(O)$, получаем

$\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\cdot 2r = 2r = d$ (миним. значение) $\Rightarrow P_{min} = d(O) \Rightarrow$ нет, периметр $\triangle PNQ$ не меньше длины MK

7

(4) $a^4 - a^2bc + b^4 - b^2ac \ge c^2ab - c^4$

$a^4 + b^4 + c^4 \ge a^2bc + b^2ac + c^2ab$

$a^2 \cdot a^2 + b^2 \cdot b^2 + c^2 \cdot c^2 \ge abc(a+b+c)$

—

получается, что $a^3+b^3+c^3 \ge abc$, это верно $\Rightarrow$ условие выполняется всегда

0