ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

00 4486

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Д О Л Г И Х
	Имя	К О Н С Т А Н Т И Н
	Отчество	В И К Т О Р О В И Ч
5.	Дата рождения	07 (число) 05 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Санкт-Петербург
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	г Санкт-Петербург
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБОУ "Президентский ФМЛ №239"

1	2	3	4	5	Σ
2	6	3	1	5	17

Место для скобы

Шифр 004486

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

1. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$; $x - \frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$ $\in \mathbb{Z}$, т.е

$\frac{x^2+2021-x}{x(x^2+2021)}$; $\frac{x^2-1}{x}$; $\frac{-(x^2+2021-x)}{x(x^2+2021}$ $\in \mathbb{Z}$

Для начала рассмотрим $\frac{x^2-1}{x}$: $x=1$: $\frac{1^2-1}{1}=0$ - подходит

$x=2$: $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$ - не подходит

$x=3$: $\frac{8}{3} \notin \mathbb{Z}$ - не подходит

$x=4$: $\frac{15}{4} \notin \mathbb{Z}$ ...

$x=5$: $\frac{24}{5} \notin \mathbb{Z}$ ...

$x=6$: $\frac{35}{6} \notin \mathbb{Z}$ ...

$x=7$: $\frac{48}{7} \notin \mathbb{Z}$ ...

$x=8$: $\frac{63}{8} \notin \mathbb{Z}$ ...

$x=9$: $\frac{80}{9} \notin \mathbb{Z}$ ...

$x=10$: $\frac{99}{10} \notin \mathbb{Z}$ ...

$x=11$: $\frac{120}{11} \notin \mathbb{Z}$ ...

...

То есть при $\forall x>1$: $\frac{x^2-1}{x} \notin \mathbb{Z}$, т.е уже условие, что все три числа - целые, не выполняется

$x=1$: $\frac{1+2021-1}{1(1+2021)} = \frac{2021}{2022} \notin \mathbb{Z}$, то есть единственное число для которого выполняюсь: $\frac{x^2-1}{x} \in \mathbb{Z}$, не подходит для остальных двух чисел, т.е получаем, что такого числа не существует

Ответ: не существует

Место для скобы

Шифр 004486

2. $\sin 2x + \sin^5 2x + 2020 \sin^9 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020 \cos^9 4x$

$| \; 2x = t$:

$\sin t + \sin^5 t + 2020 \sin^9 t = \cos 2t + \cos^5 2t + 2020 \cos^9 2t$

Это верно, если $\sin t = \cos 2t$, т.е

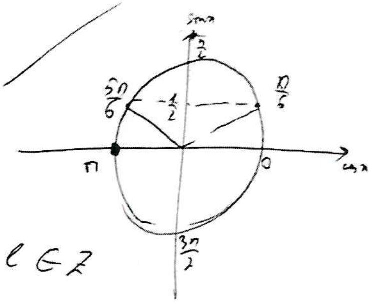
$\sin t = 1 - 2\sin^2 t$

$2\sin^2 t + \sin t - 1 = 0$

$| \; \sin t = p$: $\quad 2p^2 + p - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(p^2 + \frac{p}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cancel{2(p+1)}\left(p - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p = -1 \\ p = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$D = 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 4 = 9$

$p = \frac{-1 \pm 3}{4} \quad \left[\begin{array}{l} p = -1 \\ p = \frac{1}{2} \end{array}\right.$



Итак, $\left[\begin{array}{l} \sin t = -1 \\ \sin t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pi + 2\pi k \\ t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ t = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \pi + 2\pi k \\ t = \frac{\pi}{6} + 2\pi l \\ t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l \end{array}\right. \quad k, l \in \mathbb{Z}$

$t = 2x$, т.е $\left[\begin{array}{l} 2x = \pi + 2\pi k \\ 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi l \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \pi l \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi l \end{array}\right. \quad k, l \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \pi l \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi l \end{array}\right.$, $k; l \in \mathbb{Z}$

Место для скобы

Шифр 004486

3. $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$, $n \in \mathbb{Z}$

1) $n=2$: не получаем квадратное уравнение

$t^2+5t+3 = \cancel{t - \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}} = \left(t + \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(t + \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$ – не подходит, т.к есть нецелые коэффициенты
$\frac{5+\sqrt{13}}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{5-\sqrt{13}}{2} \notin \mathbb{Z}$

$D = 25 - 4 \cdot 3 = 25 - 12 = 13$

$t = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

2) $n \geq 3$: $n=3$: t^3+5t^2+3, т.к по условию коэффициенты целые и положительные, то не ~~получается~~ находится такого многочлена из-за „лишних" слагаемых.

Например, $(t^2+1)(t+5) = t^3+5t^2 + \underline{\underline{t+5}}$ „лишнее" слагаемое

$n=4$: t^4+5t^3+3, аналогично

Например, $(t^2+2t)(t^2+3t) = t^4 + 2t^3 + 3t^3 + 6t = t^4 + 5t^3 + 6t$

То есть всегда будет присутствовать t со степенью, меньшей $n-1$, (из-за целых и положительных коэффициентов) то есть, помимо t^n, t^{n-1}, ещё будут слагаемые по типу t^{n-2} или t^{n-3} и т.д. $(n \geq 3)$ „лишнее" слагаемое

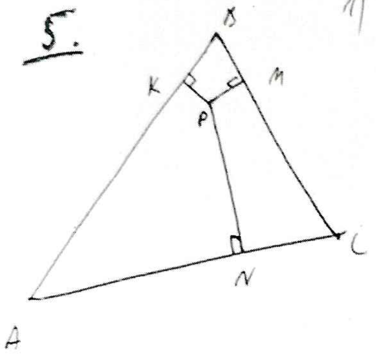
И так, получили, что при $n \geq 3$ такого ~~многочлена~~ произведения многочленов нет из-за „лишних слагаемых", а при $n=2$ получим: $\left(t + \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(t + \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$ т.е есть не целые коэффициенты, т.е представить $p(t)$ в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами невозможно

Ответ: невозможно

Место для скобы

Шифр

5.



1) Чтобы $\frac{BC}{PM}$ + $\frac{AC}{PN}$ + $\frac{AB}{PK}$ была минимальной,

необходимо, чтобы ~~$\frac{BC}{PM}$ + $\frac{AC}{PN}$~~ + $\frac{AB}{P}$

$\frac{BC}{PM}$ была минимальна, $\frac{AC}{PN}$ была минимальна и $\frac{AB}{PK}$ была минимальна

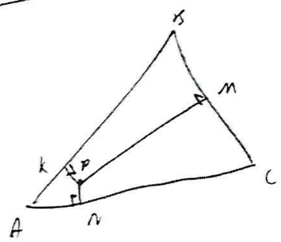
2) точки M, N, K — ортогональные проекции точки P на AB, BC и AC. То есть PM; PN и PK — это прямо расстояние от P до BC, AC и AB.

3) P не лежит в A, B и C, а также на сторонах Δ, т.к. в этом случае PM, PN или $PK = 0$ / что не может быть из-за знаменателя/

Чтобы $\frac{BC}{PM}$; $\frac{AC}{PN}$ и $\frac{AB}{PK}$ были минимальными, необходимо, чтобы знаменатель был максимальным (числитель мы не изменяем, т.к. стороны Δ не изменяются / не меняем)

Но, при увеличении одного из высот (PN, PM и PK), уменьшается другие, поэтому минимальной суммы уже не получится.

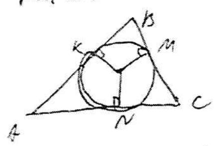
Например (P ближе к A)



$PM \geqslant PN$ и $PM > PK$, из-за этого не будет минимальной суммы.

Аналогично и для других случаев.

Теперь рассмотрим точку O, где O — центр вписанной окружности: $PM = PN = PK = r$, т.е. сумма будет минимальной и равна: $\frac{AB+BC+AC}{r}$



обоснование недостаточное.

т.е. Ответ: P совпадает с центром вписанной окружности

Место для скобы

Шифр

4. $\dfrac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\,x} \le \dfrac{3}{2} - \dfrac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \dfrac{\sqrt[3]{2020^4}\,x}{m+x^3}$

Для упрощения ~~в~~ примем $\sqrt[3]{2020^4} = t$:

$$\frac{x^3}{m+tx} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x^3+tx} - \frac{tx}{m+x^3}$$

$$\frac{x^3}{m+tx} + \frac{m}{x^3+tx} + \frac{tx}{m+x^3} \le \frac{3}{2}$$

1) $\exists\, m=1$: $\dfrac{x^3}{1+tx} + \dfrac{1}{x^3+tx} + \dfrac{tx}{1+x^3} \le \dfrac{3}{2}$

рассмотрим $x=1$: $\dfrac{1}{1+t} + \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{t}{2} \le \dfrac{3}{2}$

$$\frac{2}{1+t} + \frac{t}{2} \le \frac{3}{2}$$

$$\frac{4+t+t^2}{2+2t} \le \frac{3}{2}$$

$$8+2t+2t^2 \le 6+6t$$

$2t^2-4t+2 \le 0$

$t^2-2t+1 \le 0$ — парабола, ветви вверх, минимум в вершине: $\dfrac{-(-2)}{2\cdot 1} = 1$

$(t-1)^2 \le 0$

$1^2-2\cdot 1+1 \le 0 \Leftrightarrow 0=0$ — верно

То есть при $m=1$ — существует положительное решение неравенства (например $x=1$)

Т.е. $m=1$ — подходит

$$\frac{x^3}{m+tx} + \frac{m}{x^3+tx} + \frac{tx}{m+x^3} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x^9+x^6m+tx^7+3tx^4m+x^5t^2+x^3t^3+x^3m^2+mt^2x^2+m^2tx+m^3}{mx^6+tx^7+t^2x^5+2mtx^4+m^2x^3+mt^2x^2+m^2tx} \le \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x^9-x^7t-x^6m-x^5t^2-x^4 3mt-x^3m^2-x^2mt^2-xm^2t+2m^3 \le 0$$