ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

07507
Шифр

мет	Математика
ант	1
:	9 „А"
илия	Д И К О В А
	А Н А С Т А С И Я
ство	С Е Р Г Е Е В Н А
рождения	0 6 (Число) 0 5 (Месяц) 2 0 0 7 (Год)
на	РОССИЯ
он *(пр: Томская обл., инградская область)*	Томская область
униципального образования *т, деревня, село, город)*	село Бакчар
енный пункт *(пр: Томск, рово, Псков)*	Бакчар
ое наименование овательного учреждения, ором Вы обучаетесь в ое время	МБОУ „Бакчарская СОШ"

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail езультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

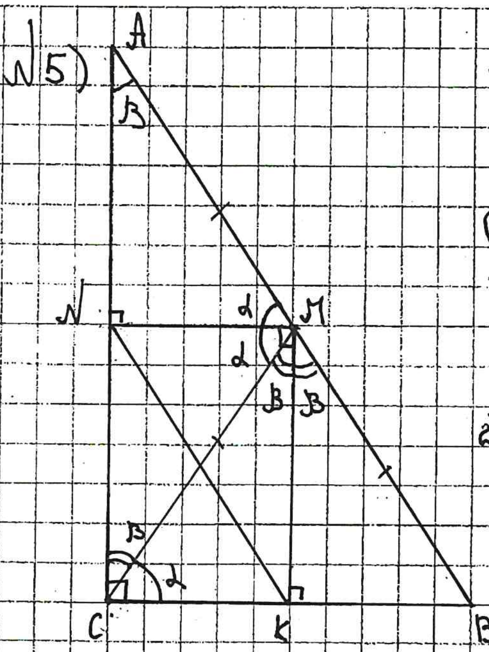
Личная подпись ________

Шифр 07507

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
14	26.03	Корякина	

№5)



1) Рассмотрим $\triangle ABC$: т.к MN и MK - биссектрисы, то
$\angle AMN = \angle CMN = \alpha$
$\angle BMK = \angle CMK = \beta$

Отсюда $\angle NMC + \angle KMC = \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow$
$\angle NMK = 90^\circ$
Из того, что $\angle AMB$ - развёрнутый следует равенство $2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

2) Т.к. $AC \perp CB$ и $\angle NMK = 90^\circ$, то $MK \perp CB$? и MC - секущая, то $\angle CMN = \angle MCK = \alpha$ и $\angle MCN = \angle CMK = \beta$

Отсюда следует, что четырехугольник $CNMK$ - прямоугольный $\Rightarrow \angle MNC = 90^\circ$

3) Из того, что $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle MBC = \alpha \Rightarrow \angle MCB = \angle MBC$, т.е. $\triangle MCB$ - равнобедренный и $CM = MB$.

4) Аналогично в $\triangle MCA$ - равнобедренном $\angle MAC = \angle MCA = \beta \Rightarrow AM = CM$

5) Получаем, $AM = CM = MB \Rightarrow M$ - середина гипотенузы AB.

Ответ: Ч.Т.Д.

Е

1	2	3	4	5	Σ
0	3	2	4	5	14

№4) $x^2 + p_1 x + 1$ корни x_1 и x_2
$x^2 + p_2 x + 1$ корни x_3 и x_4

$(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) = p_1$?

по т. Виета:

$x_1 \cdot x_2 = 1$ $\quad$ $x_3 \cdot x_4 = 1$
$x_1 + x_2 = -p_1$ $\quad$ $x_3 + x_4 = -p_2$

$(x_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot x_3 - x_2 \cdot x_3 + x_3^2) \cdot (x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_4 + x_4 \cdot x_2 + x_4^2) =$

$(1 - x_3(x_1 + x_2) + x_3^2)(1 + x_4(x_1 + x_2) + x_4^2) =$

$(1 + x_3 \cdot p_1 + x_3^2)(1 + x_4 \cdot (-p_1) + x_4^2) =$

место для скобы

Шифр 07507

$(1 + x_3 \cdot p_1 + x_3^2)(1 - p_1 \cdot x_4 + x_4^2) =$

$1 - p_1 \cdot x_4 + x_4^2 + x_3 \cdot p_1 - x_3 \cdot p_1^2 \cdot x_4 + x_4^2 \cdot x_3 p_1 + x_3^2 - p_1 \cdot x_3^2 \cdot x_4 + x_3^2 \cdot x_4^2 =$

$1 - \cancel{p_1 \cdot x_4} + x_4^2 + x_3 \cdot p_1 - p_1^2 \cancel{+ p_1 \cdot x_4} \cdot 1 + x_3^2 - p_1 \cdot x_3 + 1 =$

$1 - \cancel{p_1 \cdot x_4} + x_4^2 + x_3 p_1 - p_1^2 + \cancel{p_1 x_4} + x_3^2 - p_1 \cdot x_3 + 1 =$

$1 + x_1^2 + \cancel{x_3 p_1} - p_1^2 + x_3^2 - \cancel{p_1 x_3} + 1 =$

$2 + (x_4^2 + x_3^2 - 2x_4 \cdot x_3 + 2x_4 \cdot x_3) = p_1^2$?

$2 + (x_4 + x_3)^2 - 2 \cdot x_4 \cdot x_3 - p_1^2 =$

$2 + (-p_2)^2 - 2 - p_1^2 =$

$p_2^2 - p_1^2$

№1) $2y^2 - xy - x^2 + 2y + 7x - 84 = 0$

Разложим на множители

$2x^2 + (-x + 2)y - x^2 + 7x - 84 = 0$

$(-x + 2)y = -2x^2 + x^2 - 7x + 84$

пусть $-x + 2 \neq 0$, разделим обе части уравнения на $-x + 2$:

$y = \dfrac{-2x^2 + x^2 - 7x + 84}{-x + 2}$, $x \neq 2$

$y = \dfrac{-2x^2 + x^2 - 7x + 84}{-x + 2}$, приведём подобные

$y = \dfrac{-x^2 - 7x + 84}{-x + 2}$, $x \neq 2$

Ответ: $y = \dfrac{-x^2 - 7x + 84}{-x + 2}$, $x \neq 2$

№2) Для последовательности $x_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ нельзя найти пять идущих подряд членов, каждый из которых делится на 2025.

1) Пусть ? для любого k, не делящегося на 5, $k^4 - 1$ делится на 5.
Имеем: $k^4 - 1 = (k - 1)(k + 1)(k^2 + 1)$
Все возможные остатки от деления числа k на 5 – 1; 2; 3; 4

- Если остаток 1, то первый сомножитель делится на 5.
- Если остаток 4, то второй сомножитель делится на 5. ?

Убедимся, что если остаток = 2 или 3, то k^2 даёт остаток и так что третий его сомножитель делится на 5.

2) По малой теореме Ферма $k^{p-1}-1$ делится на p для любого простого числа p и любого натурального числа a, не кратного p.

При $p=5$ и $a=2^m, 3^m, 4^m$, $m\in\mathbb{N}$ получаем, что k^4-1 делится на 5, то есть k^4 даёт остаток 1 при делении на 5.

Получаем, что k^n-1 делится на 5, если n делится на 4, а k не делится на 5.

3) Среди любых пяти ~~чисел~~ подряд идущих членов последовательности найдётся член, номер которого делится на 4.
Докажем, что все члены с такими номерами не делятся на 5.

В выражении все слагаемые $1+2^n+3^n+4^n+5^n$ кроме последнего, дают остаток 1 при делении на 5, а последнее даёт остаток 0.

4) Поэтому сумма даёт остаток 4 при делении на 5.

То есть a_n при n кратном 4 не делится на 5, и, тем более на 2025.

Ответ: нет, невозможно.

№3) $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \le 3(a+b+c)$

1) $((\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c})^2 = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 + 2(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{c} + (\sqrt{c})^2$

$(\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 + 2(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{c} + c =$

$a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc} =$

$(a+b+c)+2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}) \le 3(a+b+c)$

$2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}) \le 2(a+b+c)$

$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc} \le a+b+c$ (корни из удвоенного произв. будут < суммы)

2) Если $a=b=c=0$, то в левой и в правой части уравнения будет 0

Ответ: ч.т.д.