ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

08163

Шифр

ет	математика
нт	1
	9
лия	Денисов
	Александр
тво	Михайлович
ождения	15 (Число) 05 (Месяц) 2007 (Год)
ı	Россия
ı *(пр: Томская обл., инградская область)*	Ростовская обл.
иципального образования *, деревня, село, город)*	Город
нный пункт *(пр: Томск, рво, Псков)*	г. Ростов-на-Дону
е наименование вательного учреждения, ром Вы обучаетесь в время	МБОУ "Гимназия №25"

сие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail ультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________

Место для скобы

Шифр 08163

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20	6.04	Корякина Е.Е.	[подпись]

1	2	3	4	5	Σ
0	[illegible]	6	7	7	20

№3

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \overset{?}{\le} 3(a+b+c)$$

1. Воспользуемся формулой: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \Leftrightarrow a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}$$

Тогда имеем: $a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac} \overset{?}{\le} 3(a+b+c)$

$$\Updownarrow$$

$$2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac} \le 2(a+b+c) \quad |:2$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac} \overset{?}{\le} a+b+c$$

2. Докажем, что для любых неотриц. α и β верно: $\sqrt{\alpha\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{2}$ (сначала докажем)

$$\sqrt{\alpha\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{2} \quad |\cdot 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha\beta} \le \alpha+\beta \Leftrightarrow$$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$\Leftrightarrow \alpha - 2\sqrt{\alpha\beta}+\beta \ge 0 \Leftrightarrow (\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2 \ge 0$$

Число в квадрате всегда $\ge 0 \Rightarrow$ верно

3. Применим на полученном в 1 пункте выражении:

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac} \le \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac} \le \frac{2a+2b+2c}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac} \le a+b+c$$

Шифр 08163

Тождественное изначальному неравенству, т.к. неравенство верно, следовательно, и изначальное тоже верно.

№ 4.

1. $x^2 + p_1 x + 1$ имеет корни $x_1 x_2$

По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -p_1$; $x_1 \cdot x_2 = 1$ | обозначим: $x_1 = a$, $x_2 = b$

$a + b = -p_1$

$ab = 1$

$x^2 + p_2 x + 1$ имеет корни $x_3; x_4$

По теореме Виета: $x_3 + x_4 = -p_2$; $x_3 \cdot x_4 = 1$ | обозначим: $x_3 = c$, $x_4 = d$

$c + d = -p_2$

$cd = 1$

2. $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) \overset{1,2}{\Leftrightarrow} (a-c)(b-c)(a+d)(b+d) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (ab - ac - bc + c^2)(ab + ad + bd + d^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2b^2 + a^2bd + ab^2d - a^2bc - a^2cd - abcd -$

$- acd^2 - ab^2c - abcd - b^2cd - bcd^2 + abc^2 +$

$+ ac^2d + bc^2d + c^2d$

$\Updownarrow$ $ab = 1$, $cd = 1$

$1 + ad + bd + d^2 - ac - a^2 - 1 - ad - bc - 1 - b^2 - bd + c^2 +$

$+ ac + bc + 1$

$\Updownarrow$

$c^2 + d^2 - a^2 - b^2$

Место для скобы

Шифр 08163

$c^2+d^2-a^2-b^2 \Leftrightarrow (c^2+d^2+2)-(a^2+b^2+2) \Leftrightarrow$

$ab=1$
$cd=1$

?

$\Leftrightarrow (c^2+d^2+2cd)-(a^2+b^2+2ab) \Leftrightarrow (c+d)^2-(a+b)^2 \Leftrightarrow$

форм. сокр. умнож.

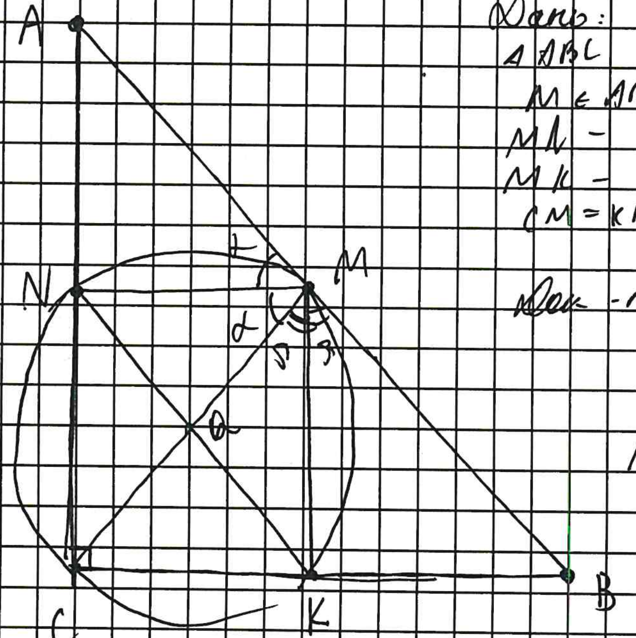
$\Leftrightarrow (-p_2)^2-(-p_1)^2 = p_2^2-p_1^2$

$a+b=-p_1$
$c+d=-p_2$

получили предыдущий многочлен тождеств. преобразованиями
$\Downarrow$
доказано

X

№5.



Дано:
$\triangle ABC$, $\angle C=90^\circ$
$M \in AB$
MN — биссект. $\angle AMC$, $N \in AC$
MK — бис. $\angle CMB$, $K \in BC$
$CM=KN$

Док-ть: M — сер. AB

Док-во.

1. MN и MK — биссектрисы $\Rightarrow$?
$\Rightarrow \angle AMN=\angle NMC$
$\angle CMK=\angle KMB$ $\Rightarrow$
$\angle AMN+\angle NMC+\angle CMK+\angle KMB=180^\circ$ (смежные)

$\Rightarrow 2(\angle NMC+\angle CMK)=180^\circ \Leftrightarrow 2\angle NMK=180^\circ \Leftrightarrow \angle NMK=90^\circ$

2. $NMKC$: $\angle M=90^\circ$, $\angle C=90^\circ$ $\} \Rightarrow \angle M+\angle C=180^\circ$, $\angle M$ и $\angle C$ — против. $\} \Rightarrow$ вокруг $NMKC$ можно описать окружность (ω_1)

Место для скобы

Шифр 08163

2.2) $N, M, K, C \in \omega$,

$NK \cap MC = Q$

По теореме о пересеч. хорд:

$NQ \cdot QK = CQ \cdot QM$

$$\left.\begin{array}{l} NQ = a \\ QM = b \\ CM = NK = c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} QK = c-a \\ CQ = c-b \end{array}\right\} \Rightarrow a(c-a) = b(c-b) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow ac - a^2 = bc - b^2$

$ac - bc = a^2 - b^2$

$c(a-b) = (a+b)(a-b)$

$(a-b)(c-a-b) = 0$

I $a = b \Rightarrow NQ = QM$

$$\left.\begin{array}{l} NQ = QM \\ NK = MC \end{array}\right\} \Rightarrow QK = QC$$

$\triangle NQC$ и $\triangle MQK$: $$\left.\begin{array}{l} NQ = QM \\ CQ = QK \\ \angle NQC = \angle MQK \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle NQC = \triangle MQK$$ (по сторонам и углу между ними) $\Rightarrow$

$\Rightarrow NC = MK$ (лежат против равных углов)

$\triangle CNM$ и $\triangle MCK$: $\triangle CNK$ и $\triangle NMK$: $$\left.\begin{array}{l} \angle C = \angle M = 90° \Rightarrow \text{прямоуг.} \\ MK = NC \text{ (из пред.)} \\ NK - \text{общ} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle CNK = \triangle MNK$ по кат. и гип. $\Rightarrow$

$\Rightarrow NM = CK$ (лежат против равных углов)

$$\left.\begin{array}{l} NM = CK \\ NC = MK \end{array}\right\} \Rightarrow NMKC - \text{пар-ма по признаку о рав. против. сторон}$$

Место для скобы

Шифр

$NMKC$ – пар-мм $\Rightarrow \angle N = \angle K = 180° - \angle M = 180° - 90° = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow CNMK$ – прямоуг. (пар-мм, у которого все углы $= 90°$)

II $\quad a + b = c \Rightarrow NQ + QM = c$, но тогда и $CQ + QK = 2c - c = c$

$QK = r \qquad CQ = p$

~~По теореме о пропорц. отрезков пол.~~

$\triangle NMQ$ и $\triangle QKC$: $\left.\begin{array}{l}(\angle NKC = \frac{1}{2} \cup NC = \angle NMC)\\(\angle MNQ = \angle MCK = \frac{1}{2} \cup MK)\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle NMQ \sim \triangle QKC$ (по двум углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{NQ}{CQ} = \dfrac{QM}{QK} = k \qquad \left.\begin{array}{l}NQ = kQC\\QM = kQK\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow NQ + QM = k(QC + QK)\\NQ + QM = QC + QK = c\end{array}\right\} = c = kc \Rightarrow k = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow NQ = QK = QM = QC \Rightarrow NMKC$ – пар-мм по признаку: (диагонали дел. точкой пересеч. пополам)

$\left.\begin{array}{l}NMKC \text{ – пар-мм}\\NK = CM \text{ – диагонали равны}\end{array}\right\} \Rightarrow NMKC$ – прям-к

3) $\angle AMC = \alpha = \angle AMN$ (MN – биссек.) $\quad$ ~~$\angle AMA = \angle AMC =$~~ $\angle CMK = \angle KMB = \beta$ (MK – биссект.)

$\angle CMK = \angle KMB = \beta$

$\angle MCK = 90° - \angle CMK = 90° - \beta$ (сумма острых углов

$\angle MBK = 90° - \angle KMB = 90° - \beta$ (сумма острых углов

$\angle MCK = \angle MBK \Rightarrow \triangle CMB$ – равноб. $\Rightarrow CM = MB$ (боковые стороны)

~~4)~~

4. $\angle AMC = \angle AMN = \alpha$

$\angle MAN = \angle ACM = 90 - \alpha$ (сумма острых углов) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\angle MAC$ – равнобедр. $\Rightarrow$ $AM = MC$ (боковые стороны)

5. $\left.\begin{array}{l} AM = MC \text{ и} \\ MC = MB \end{array}\right\} \Rightarrow AM = MB \Rightarrow M$ – середина AB

№2.

$X_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$

1. Рассмотрим остатки деления на 10.

$X_n \vdots 2025 \Rightarrow X_n \underset{10}{\equiv} \{0; 5\}$

Очевидно, что $1 + 5^n \underset{10}{\equiv} \{6\}$

Найдем какие остатки при делении на 10 дают 2^n; 3^n; 4^n.

1)

n	2^n	3^n	4^n
1	2	3	4
2	4	9	16
3	8	27	64
4	16	81	256

После $n=4$ остатки при делении на 10 будут повторяться

поэтому достаточно рассмотреть $n=1$; $n=2$; $n=3$; $n=4$

а) $n = 1 \Rightarrow 2^n + 3^n + 4^n \underset{10}{\equiv} 9$

б) $n = 2 \Rightarrow 2^n + 3^n + 4^n \underset{10}{\equiv} 9$

в) $n = 3 \Rightarrow 2^n + 3^n + 4^n \underset{10}{\equiv} 9$

$n = 4 \Rightarrow 2^n + 3^n + 4^n \underset{10}{\equiv} 7$

Из рассмотренного выше в очевидно, что при

$X_n \quad n = 4k, \ k \in N$

$X_n \underset{10}{\equiv} 6 + 7 \underset{10}{\equiv} 3$

Однако $X_n \underset{10}{\equiv} \{0;5\}$

если помним, чтобы $X_n \vdots 2025$

$\Rightarrow$ ни один четвертый член не делится на 2025

$\Downarrow$

Нельзя найти лишь послед. членов делящихся на 2025

Ответ: нет, нельзя

№1.

$2y^2 - xy - x^2 + 2y + 7x - 84 = 0$

1. Разложим на множители

$2y^2 + xy - 2xy - x^2 + 2y + 7x - 84 = 0$

$2y(y - x + 1) - x(x - y + 1) + 6x - 84 = 0$

$(2y + x)(y - x + 1) = 6(14 - x)$

Заметим очевидное решение: $x = 14$

$y - x + 1 = 0$

$y - 13 = 0$

$y = 13$

$(14; 13)$

2. при $x \in [1; 13]$

$6 \leq 6(14 - x) \leq 78$

$2y + x \geq 2y + 13$

$y - x + 1 \geq y - 13$

у должно быть ≥ 14 В противном случае будет выр. = положит.

Место для скобы

Шифр

(7) ~~$2y+13 \geq 39$~~ $2\cdot 9+13=41$

~~$y-13 \geq 1$~~

~~при~~ $y \geq 14$

$x \in (1;13)$

можно подобрать решение:

при $y=1$

?! ответ?