ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004560

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ДАВИДОВ
	Имя	ВИКТОР ОЛЕГОВИЧ ДАВИДОВ
	Отчество	ОЛЕГОВИЧ
5.	Дата рождения	18 (число) 05 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Москва
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Москва
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБОУ №2009

1	2	3	4	5	Σ
4	7	5	6	–	22

№2 Рассмотрим функцию $f(t)=t+t^5+2020t^9$, 004560
где $t=\sin(2x)$. Тогда $f'(t)=5t^4+9\cdot 2020t^8$,
т.к у t степень четная, что функция $f(t)$ - явл
возрастающей $\Rightarrow$ и функция $f(g)$, где $g=\cos 4x$,
тоже возраст. $\Rightarrow$ $f(t)=f(g)$, т.к функции
монотонно возрастающие. $\Rightarrow$ $t=g$.

$$\sin 2x=\cos 4x$$
$$\sin 2x = 1-2\sin^2 2x$$
$$2\sin^2 2x+\sin 2x-1=0$$
$$\left(\sin 2x-\frac{1}{2}\right)(\sin 2x+1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x=\frac{1}{2}\\ \sin 2x=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{6}+2\pi n;\\ 2x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\\ 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\end{array}\right. n\in Z\quad\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+\pi n;\\ x=\frac{5\pi}{12}+\pi n;\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n;\end{array}\right. n\in Z.$$

Отв: $x=\frac{\pi}{12}+\pi n$; $x=\frac{5\pi}{12}+\pi n$; $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $n\in Z$

№1

т.к число $x-\frac{1}{x}$ - целое число, только при $x=\pm 1$
$\Rightarrow$ при подставлении значений x в другое
число получаем, что они не целые

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x=1$.

$$1-\frac{1}{2022}=\frac{2021}{2022}\text{ — не целое}$$

$x=-1$.

$$-1-\frac{1}{2022}=-\frac{2023}{2022}\text{ — не целое}$$

при $x=1$ при $x=-1$.

Аналогично с числом $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$ $-\frac{2021}{2022}$; $\frac{2023}{2022}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не существует такого числа.

№3 ..

$t^n + 5t^{n-1} + 3 = f\cdot g$.

004560

Мы рассматриваем как рациональные корни, так и ~~комплексные~~ комплексные. f и g — целые ~~ч~~ числа, произведение корни равны ~~по~~ последнему коэффициенту, а это целое число „3".

=> ~~что~~ например

$z_1, z_2, z_3, \dots z_m$ — корни „g" (комплексные)

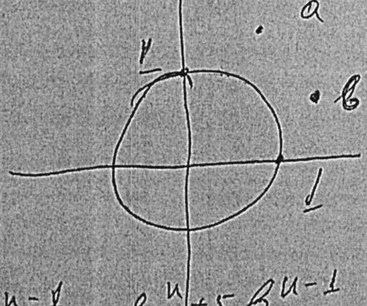
$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_m = k$ — целое

=> $|z_1|\cdot|z_2| \cdot \ldots \cdot |z_m| = |k| \geq 1$.

=> хотя бы один $|z_i| \geq 1$.

Аналогично у g есть хотя бы один корень модуль, которого ≥ 1 => у нашего мн-ля $t^n + 5t^{n-1} + 3 = 0$ есть как минимум два корня по модулю ≥ 1 (возможно они совпадают, но мы используем понятие кратности, то можем считать, что корней 2)

Покажем, что мн-н $h(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$ не может иметь двух корней по модулю ≥ 1.



$$\begin{cases} a^n + 5a^{n-1} + 3 = 0 \\ b^n + 5b^{n-1} + 3 = 0 \end{cases}$$

$(a^n - b^n) + 5(a^{n-1} - b^{n-1}) = 0$.

$a^n + 5a^{n-1} = b^n + 5b^{n-1}$

$a \neq b$ => $|a| > |b|$ или $|b| > |a|$ и $|a|^{n-1} > |b|^{n-1}$

=> $|a|^n + 5|a|^{n-1} > |b|^n + |b|^{n-1}$ и => равенство $a^n + 5a^{n-1} = b^n + 5b^{n-1}$ не возможно.

№4

004560

пусть $z = x^3$, $x\cdot\sqrt[3]{2020^4} = y$ $\Rightarrow$

$$\frac{z}{m+y}+\frac{m}{z+y}+\frac{y}{z+m} \le \frac{3}{2}$$

Используя неравенство о средних получаем

какое? необоснованно?

$$\frac{z}{m+y}+\frac{m}{z+y}+\frac{y}{z+m} \ge 3\cdot\sqrt[3]{\frac{zmy}{(m+z)(z+y)(m+y)}}$$

ещё раз используем неравенство о средних

$$3\sqrt[3]{\frac{zmy}{(m+z)(z+y)(m+y)}} \ge 3\sqrt[3]{\frac{zmy}{2\sqrt{mz}\cdot 2\sqrt{zy}\cdot\sqrt{my}}}$$

$$3\sqrt[3]{\frac{\cancel{zmy}}{8\cancel{zmy}}} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Получаем, что $\frac{z}{m+y}+\frac{m}{z+y}+\frac{y}{z+m} \ge \frac{3}{2}$ и

$\frac{z}{m+y} = \frac{m}{y+z} = \frac{y}{m+z} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ решая эту ~~...~~ систему получаем, что

$$\begin{cases} \frac{z}{m+y}+\frac{m}{z+y}+\frac{y}{z+m} \ge \frac{3}{2} \\ \frac{z}{m+y} = \frac{m}{y+z} = \frac{y}{m+z} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m = z = y \rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = x\cdot\sqrt[3]{2020^4} = m$$

$$x^3 = x\cdot\sqrt[3]{2020^4}$$

$$x^3 - x\cdot 2020\cdot\sqrt[3]{2020} = 0$$

$$x(x^2 - 2020\cdot\sqrt[3]{2020}) = 0$$

т.к. $m>0$, то $x>0$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \cancel{\pm\sqrt{2020\cdot 505}} \\ \pm\sqrt[3]{2020^2} \end{array}\right. \Rightarrow x = \sqrt[3]{2020^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m = 2020^2$$

Отв: $m = 2020^2$