07412

Шифр

…ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

…ет	Математика
…нт	1
	9
…ния	Ц Ы Б И К Ж А П О В А
	А Л И Н А
…тво	Н И М А Ж А П О В Н А
…ождения	0 4 (Число) 0 5 (Месяц) 2 0 0 8 (Год)
…а	Россия
…и *(пр: Томская обл., …инградская область)*	Республика Бурятия, Джидинский район.
…ниципального образования *(…, деревня, село, город)*	село Петропавловка
…енный пункт *(пр: Томск, …ово, Псков)*	
…е наименование …вательного учреждения, …ром Вы обучаетесь в … время	Муниципальное Автономное Общеобразовательное учреждение. Петропавловская Средняя Общеобразовательная школа № 1

…асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail …зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____

1	2	3	4	5
6	2	7	7	5

Шифр 07412

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
27б	26.03.23	Гладышева	

Задание 1

$2y^2 - xy - x^2 + 2y + 7x - 84 = 0$ $(12+72)$

$-x^2 - xy + 7x + 2y^2 + 2y - 84 = 0$

$x^2 + (y-7)x - (2y^2 + 2y - 12) = -72$

$D = (y-7)^2 + 4(2y^2+2y-12) = y^2 - 14y + 49 + 8y^2 + 8y - 48 = 9y^2 - 6y + 1 = (3y-1)^2$

$x_1 = \frac{-(y-7)-(3y-1)}{2} = \frac{-y+7-3y+1}{2} = \frac{-4y+8}{2} = \frac{2(2y+4)}{2} = -2y+4$

$x_2 = \frac{-(y-7)+3y-1}{2} = \frac{-y+7+3y-1}{2} = \frac{2y+6}{2} = \frac{2(y+3)}{2} = y+3$

$ax^2+bx-c = a(x-x_1)(x-x_2)$

$x^2+(y-7)x-(2y^2+2y-12) = (x+2y-4)(x-y-3)$

Превращаем в неравенство ?

-72 и 1; -36 и 2; -24 и 3; -18 и 4; -12 и 6; -8 и 9; -9 и 8; -6 и 12; -4 и 18; -3 и 24; -2 и 36; -1 и 72.

$\begin{cases} x+2y-4=9 \\ x-y-3=-8 \end{cases}$

$3y-1=17$

$y=6$

$x-6-3=-8$

$x=1$

$(1;6) - \in N$

$\begin{cases} x+2y-4=36 \\ x-y-3=-2 \end{cases}$

$3y-1=38$

$y=13$

$x-13-3=-2$

$x=14$

$(14;13) - \in N$

6б

Ответ: $(1;6)(14;13)$

Задание 2

Дана последовательность $x_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$

$$\left.\begin{array}{r|l} 2025 & 3 \\ 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}\right\} \Rightarrow 3^4 + 5^2 = 2025$$

$\Rightarrow$ Не возможно найти последовательность пяти идущих подряд членов, каждый из которых будет делиться на 2025 т.к они должны оканчиваться на 00, 75, 25, 50

Задание 3

$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq 3(a+b+c)$

$(\sqrt{a} + (\sqrt{b} + \sqrt{c}))^2 \leq 3(a+b+c)$

$\sqrt{a}^2 + 2\sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) + \sqrt{b}^2 + 2\sqrt{bc} + \sqrt{c}^2 \leq 3(a+b+c)$

$a + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + b + 2\sqrt{bc} + c \leq 3(a+b+c)$

$a+b+c + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} \leq 3(a+b+c)$

$2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} \leq 2(a+b+c)$ ~~$\sqrt{2}$~~

~~$2(\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$~~

$\cancel{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}) \leq \cancel{2}(a+b+c) \quad |:2$

$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} \leq a+b+c$

По неравенству Коши

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \\ \\ \dfrac{a+c}{2} \leq \sqrt{ac} \\ \\ \dfrac{b+c}{2} \leq \sqrt{bc} \end{array}\right\} +$$

$\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a+c}{2} + \dfrac{b+c}{2} \leq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$

$\dfrac{2a + 2b + 2c}{2} \leq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc}$

место для скобы

Шифр 07412

$$\frac{2(a+b+c)}{2} \le \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$$

$a+b+c \le \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$

Ответ:
Неравенство выполняется $a+b+c = a+b+c$ при любых неотрицательных числах

Задание 4

многочлен x^2+p_1x+1 корни x_1, x_2
многочлен x^2+p_2x+1 корни x_3, x_4

По теореме Виета

$x_1+x_2=-p_1$ $\qquad$ $x_3+x_4=-p_2$

$x_1x_2=1$ $\qquad$ $x_3x_4=1$

Рассмотрим ~~нер~~ равенство

$(x_1-x_3)(x_2-x_3)(x_1+x_4)(x_2+x_4)$

$$(\underbrace{x_1x_2}_{1}-x_1x_3-x_2x_3+x_3^2)(\underbrace{x_1x_2}_{1}+x_1x_4+x_2x_4+x_4^2) = \underbrace{x_3x_4}_{1}(p_1+p_2)(p_1+p_2) =$$

$$=(p_1-p_2)(p_1+p_2)=p_1^2-p_2^2$$

$1-x_3(\underbrace{x_1+x_2}_{-p_1}-x_3)$ $\qquad$ $1+x_4(\underbrace{x_1+x_2}_{-p_1}+x_4)$

$\underbrace{1}_{||}+x_3p_1+x_3^2$ $\qquad$ $1+x_4(-p_1+x_4)$

$x_3x_4+x_3p_1+x_3^2$ $\qquad$ $1-x_4p_1+x_4^2$

$x_3(x_4+p_1+x_3)$ $\qquad$ $x_3x_4-x_4p_1+x_4^2$

$x_3(p_1+\underbrace{x_3+x_4}_{-p_2})$ $\qquad$ $x_4(x_3-p_1+x_4)$

$x_4(\underbrace{x_3+x_4}_{-p_2}-p_1)$

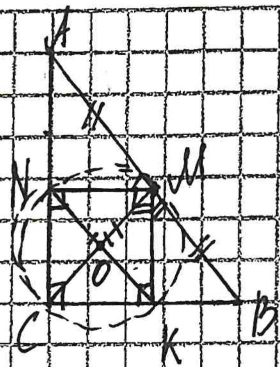
$x_3(p_1-p_2)$

$x_4(-p_2-p_1)$

$x_4(p_1+p_2)$

Ответ: ч.т.д

Задание 6.



Дано: $\triangle ABC$ – п/у
т.$M \in AB$
MK и MN – биссектрисы
$CM = KN$ $\angle ACB = 90^\circ$
Д-ть: т.M середина гипотенузы AB
Решение:

Построим окружность с серединой т.O, диаметр которой станет $CM \Rightarrow KN$ тоже будет диаметром этой окружности.

Т.к. $\angle M$ является развёрнутым $\Rightarrow \angle M = 90^\circ$

Т.к. тN и тK лежат на окружности и являются диаметром $\Rightarrow \angle N$ и $\angle K = 90^\circ$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ MK является биссектрисой под углом $90^\circ \Rightarrow$
MK является высотой $\triangle CMB \Rightarrow \triangle CMB$ равнобедрен. $\Rightarrow$ ~~AM BC~~ $MC = MB$
MN является ~~высотой~~ биссектрисой под углом $90^\circ \Rightarrow MN$ является высотой $\triangle AMC \Rightarrow \triangle AMC$ равнобедренный $\Rightarrow AM = MC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~AM = CB~~ $\Rightarrow AM = MC = MB \Rightarrow AM = MB \Rightarrow$ тM является серединой гипотенузы AB.

Ответ: ч.т.д.

60