004463

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ЧУБЕНКО
	Имя	АЛЕКСЕЙ
	Отчество	ВИТАЛЬЕВИЧ
5.	Дата рождения	04 (число) 11 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Не задан
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Батайск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ СОШ №12

№1 $\underbrace{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}}_{a}$; $\underbrace{x-\frac{1}{x}}_{b}$; $\underbrace{\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}}_{c}$

004463

Заметим, что все целые => сумма целых - целая.
Можно заметить, что a и c взаимно обратные по знаку.
Сложим a и b:

$a+b=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}+x-\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x^2+2021}$ - должно быть целым, но тогда $x-\frac{1}{x^2+2021}$ и $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$, но $\frac{1}{x^2+2021}$ - дробь, которая всегда <1 =>
=> число $\left(x-\frac{1}{x^2+2021}\right)=k$, $k\in\mathbb{Z}$ и у числа x такая же дробная часть, как и у $\frac{1}{x}$. Но это выполняется только при $x=\pm1$.

~~Подставив $x=\pm1$ в a и c эти числа получаю не целыми => Ответ: нет такого x~~

Если $\underbrace{x - \frac{1}{x^2+2021}}_{\text{целое}}$ => $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$

$\frac{1}{x}$ ↓ дробь но $\left|\frac{1}{x}\right|<1$ => это целое только если $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2+2021}$

7 б

$x^2-x+2021=0$

$D<0$ => что не может быть.

Подставив $x=\pm1$ в a и c эти числа получаются не целыми => Ответ: нет ~~такох~~ такого x

Итого

1	2	3	4	5
7	7	1	7	7

29 б

~~x^2+2021 x~~

~~Сделаем оценку на второе число $x-\frac{1}{x}$~~

004463

~~При $x \le 9$~~

№2

$\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\sin^9(2x)=\cos(4x)+\cos^5(4x)$
$+2020\cdot\cos^9(4x)$; Пусть $t=\sin(2x)$ и $z=\cos(4x)$

$f(t)=t+t^5+2020t^9$

$f(z)=z+z^5+2020z^9$

Возьмем производную от $f(t)$:

$f'(t)=1+5t^4+18180t^8$

t^4 и t^8 всегда $\geq 0 \Rightarrow$ фун-ция $f(t)$ монотонно возрас.

Возьмем производную от $f(z)$:

$f'(z)=1+5z^4+18180z^8$

z^4 и z^8 всегда $\geq 0 \Rightarrow$ фун-ция $f(z)$ монотонно возрас.

В таком случае $f(t)=f(z)$ только в том случае, если $t=z$.

$\sin(2x)=\cos(4x)$

$\sin(2x)=1-2\sin^2(2x)$

$2\sin^2(2x)+\sin(2x)-1=0$

$D=1+4\cdot 2\cdot 1=9$

$$\left[\begin{aligned}&\sin(2x)=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}\\&\sin(2x)=\frac{-1-3}{4}=-1\end{aligned}\right.$$

7Б

004463

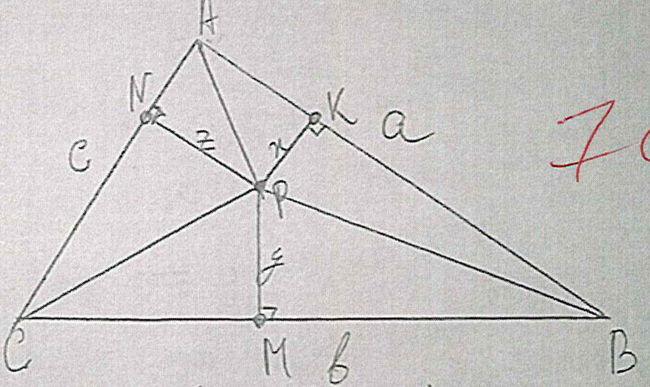
$$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l,\ l \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi l,\ l \in Z \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z;\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z;\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi l,\ l \in Z$

№5 Пусть $AB = a$, $BC = b$ и $AC = c$ и $PK = x$, $PM = y$, $PN = z$

Найти: $\min\left(\frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{a}{x}\right)$



7б

Решение:

$S_{ABC} = S_{APC} + S_{APB} + S_{BPC} =$

$= \frac{1}{2} cz + \frac{1}{2} \cdot by + \frac{1}{2} \cdot ax$

$2 S_{ABC} = cz + by + ax$

Домножим обе части ур-ния на $\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)$:

$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \cdot 2 S_{ABC} = (ax + by + cz)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)$

$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \cdot 2 S_{ABC} = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{abx}{y} + \frac{acx}{z} + \frac{aby}{x} + \frac{bcy}{z} + \frac{acz}{x} + \frac{bcz}{y}$

$\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \cdot 2 S_{ABC} = a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + ac\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + bc\left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right)$.

Числа $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ – взаимообратные. По неравенству о средних, т.к. эти числа положительные, то $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Аналогично для чисел $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$ и $\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \geq 2$

Продолжение №5

Тогда $a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+ac\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+bc\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\geq$
$\geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

Минимальным значение в данном неравенстве будет при равенстве левой и правой частей $\Rightarrow$
$\Rightarrow x=y=z \Rightarrow (\cdot)\,P$ – центр вписанной окружности ~~в △~~ (неравенство достигается при равенстве слагаемых)

~~Ответ.~~ Причём x, y и z – радиусы этой окружности.

№3 $p(t)=t^n+5t^{n-1}+3$, $n>1$ и n – целое

По теореме Виета для многочлена n-ой степени:

$$\begin{cases} t_1+t_2+\ldots+t_n=-5 \\ t_1\cdot t_2\cdot\ldots\cdot t_n=3 \end{cases}$$

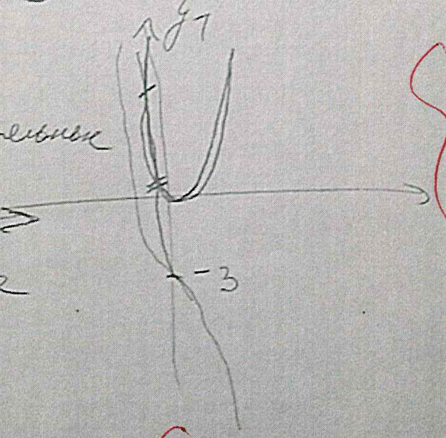
t_j – корни
$j\in[j;n]$ и j – целое

$t^n+5t^{n-1}+3=0$

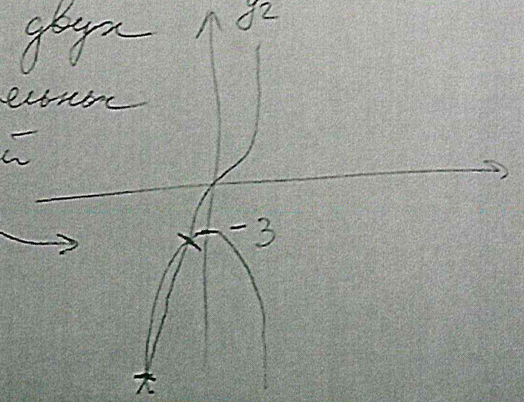
$t^n=-5t^{n-1}-3$

$y_1=t^n$, $y_2=-5t^{n-1}-3$

При n – чётных не более 2 отрицательных корней.



При n – нечётных не более двух отрицательных корней



Продолжение №3

$y_1 = t^n$

$y_2 = -5t^{n-1} - 3$

Т.к. по т. Виета количество отрицательных корней четно (т.к. $t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_n = 3$) $\Rightarrow$ 2 отрицательных корня

$\begin{cases} t_1 + t_2 = -5 \\ t_1 \cdot t_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$ ур-ние имеет вид $t^2+5t+3=0$

$t^2+5t+3=0$

$D = 25 - 12 = 13$

$t = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\left(\sqrt{13} \approx 3,7 \Rightarrow t_1 = \frac{-5-3,7}{2} < 0 \text{ и } t_2 = \frac{-5+3,7}{2} < 0\right)$

$\Rightarrow$ из многочлена $p(t)$ можно выделить множитель $f(t) = (t^2+5t+3)$, а второй множитель будет $\to$

$\to g(t) = (t^{n-2} + (-3)t^{n-4} + \ldots + 1)$

$$\begin{array}{l|l} t^n + 5t^{n-1} + 3 & t^2+5t+3 \\ \hline -\; t^n + 5t^{n-1} + 3t^{n-2} & t^{n-2} - 3t^{n-4} + \ldots + 1 \\ \quad -3t^{n-2} + 3 & \\ \quad -\; -3t^{n-2} - 15t^{n-3} & \\ \quad\quad 15t^{n-3} + \ldots & \end{array}$$

1 б

Обоснование некорректно

Ответ неверный

Ответ: Да, возможно

~~№1 $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$, $x - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2-2021} - \frac{1}{x}$~~

~~? Есть ли какой-то x, при котором эти 3 числа целые?~~

№4 $\dfrac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \dfrac{3}{2} - \dfrac{m}{x\cdot(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \dfrac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}$

Пусть $\sqrt[3]{2020^4}\cdot x = t$ $(t>0)$

По условию $x>0$ и $m>0$

$$\frac{x^3}{m+t}+\frac{m}{x^3+t}+\frac{t}{m+x^3}\le\frac{3}{2}$$

Сумма и отношение положительных чисел – положительно

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{x^3}{m+t}+\frac{m}{x^3+t}+\frac{t}{m+x^3}}\ge\frac{2}{3} \quad \Big|\cdot 3$$

$$\frac{3}{\frac{x^3}{m+t}+\frac{m}{x^3+t}+\frac{t}{m+x^3}}=2 \quad (\sim)$$

По неравенству о средних: $\dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\le\dfrac{x+y+z}{3}$,

причем равенство достигается при $x=y=z$

7б

Поэтому из $(\sim)$:

$$\underbrace{\frac{m+t}{x^3}+\frac{x^3+t}{m}+\frac{m+x^3}{t}}_{:3}\ge\frac{3}{\frac{x^3}{m+t}+\frac{m}{x^3+t}+\frac{t}{m+x^3}}\ge 2$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{m+t}{x^3}+\frac{x^3+t}{m}+\frac{m+x^3}{t}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{m}{x^3}+\frac{t}{x^3}+\frac{x^3}{m}+\frac{t}{m}+\frac{m}{t}+\frac{x^3}{t}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{m}{x^3}+\frac{x^3}{m}}_{\ge 2}+\underbrace{\frac{t}{x^3}+\frac{x^3}{t}}_{\ge 2}+\underbrace{\frac{m}{t}+\frac{t}{m}}_{\ge 2}\right)\ge 2 \Rightarrow \text{выполняется}$$

Заметим, что оценка в последнем достигается при тех же условиях, что и в исходном неравенстве:

$$\begin{cases} x^3=m \\ m=t \\ x^3=t \end{cases} \Rightarrow x^3=\sqrt[3]{2020^4}\cdot x$$

Т.к. $x>0$ $x^2=\sqrt[3]{2020^4} \Rightarrow x=\sqrt[3]{2020^2}$. Ответ: $m=2020^2$