ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004465

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Ч Е Р Н Я В С К И Й
	Имя	Е Г О Р
	Отчество	А Л Е К С А Н Д Р О В И Ч
5.	Дата рождения	09 (число) 07 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ставропольский край
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Михайловск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ Лицей №2

004465

Место для скобы

Шифр

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
33б	14.04.21	Гендрико И.Ю.	[signature]

№1

Рассмотрим число $x-\frac{1}{x}$. Если x – число иррациональное, то $x-\frac{1}{x} \notin Z$, т.к. x и $\frac{1}{x}$ – иррацион. Предположим, что x – число рациональное и представимо в виде $x=\frac{a}{b}$, где $(a;b)=1$. Тогда необходимо, чтобы $x-\frac{1}{x}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab} \in Z$, т.е. $(a^2-b^2) \vdots ab$, но т.к. a и b – целые числа, то получаем, что $a \vdots b$, $b \vdots a$, => противоречие с условием $(a;b)=1$, т.е. если число x – не целое, то число $x-\frac{1}{x}$ не может быть целым. Если X – целое число (за исключением ± 1), то $\frac{1}{x}$ – число нецелое, а значит $x-\frac{1}{x}$ – тоже нецелое. Рассмотрим $x=1$:

$1-\frac{1}{1}=0$ – целое, но тогда число $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021} \notin Z$

$x=-1$:

$-1+\frac{1}{1}=0$ – целое, но тогда число $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021} \notin Z$

Значит, такого значения x не существует

Ответ: нет, не существует

7 б

1	2	3	4	5
7	7	5	7	7

Место для скобы

Шифр 004465

№2.

$\sin 2x + \sin^5 2x + 2020 \sin^9 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020 \cos^9 4x$

Рассмотрим ф-цию $f(t) = t + t^5 + 2020\, t^9$

$f'(t) = 1 + 5t^4 + 2020 \cdot 9t^8$

Найдем нули производной:

Пусть $t^4 = v \geq 0$:

$1 + 5v + 2020 \cdot 9v^2 = 0$

$D = 25 - 36 \cdot 2020 < 0$, => нет нулей производной

А значит, $f'(t) > 0$, => ф-ция $f(t)$ монотонно возрастает, тогда ур-ие $f(\sin 2x) = f(\cos 4x)$ может иметь корни тогда и только тогда, когда равны аргументы, т.е. $\sin 2x = \cos 4x$ (в силу монотонности и непрерывности ф-ции):

$\sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - 4x)$

$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} - 4x + 2\pi k \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 4x + 2\pi k \end{array}\right.$, $k \in Z$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{array}\right.$, $k \in Z$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$

7б

Место для скобы

Шифр 004465

№4.

Пусть $x^3 = a$, $m = b$, $\sqrt[3]{2020^4}\,x = c$, а $a+b+c = S$. Тогда нер-во примет вид:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \le \frac{3}{2}$$

Представим каждое слагаемое следующим способом:

$\frac{a}{b+c} = \frac{(a+b+c)-(b+c)}{b+c} = \frac{S}{b+c} - 1$, аналогично и остальные.

Тогда нер-во примет вид:

$$\frac{S}{b+c} + \frac{S}{a+c} + \frac{S}{a+b} \le \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$$

Обозначим левую часть нер-ва за A и оценим ее:

$A \ge \frac{3S}{\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)}}$ (из нер-ва о средних) т.к. x и $m > 0$ то и $a, b, c > 0$, а значит, нер-ва справедливы

А т.к. $\sqrt[3]{(a+b)(a+c)(b+c)} \le \frac{2(a+b+c)}{3} = \frac{2S}{3}$ то $A \ge \frac{9S}{2S} = \frac{9}{2}$. 7 б

Тогда $\frac{9}{2} \le A \le \frac{9}{2}$, значит, $A = \frac{9}{2}$, и рав-во достигается тогда и только тогда, когда $a = b = c$.

Значит $\begin{cases} x^3 = \sqrt[3]{2020^4}\,x, \\ m = x^3; \end{cases}$

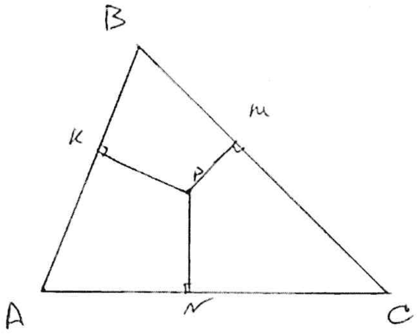
Т.к. $x > 0$, то $x^2 = \sqrt[3]{2020^4}$, => $x = \sqrt[3]{2020^2}$, тогда $m = x^3 = 2020^2$

Ответ: 2020^2

Место для скобы

Шифр

№5.



Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, $PM=x$, $PN=y$, $PK=z$. Тогда

$ax+by+cz=2(S_{BPC}+S_{APC}+S_{BPA})=$

$=2S_{ABC}$. Пусть r - радиус вписанной окружности $\triangle ABC$.

Тогда $2S_{ABC}=ax+by+cz \ge 3\sqrt[3]{abcxyz}$ (нер-во о средних). =>

$\Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \le \frac{2S_{ABC}}{3\sqrt[3]{abc}} = \frac{(a+b+c)r}{3\sqrt[3]{abc}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \ge \frac{3\sqrt[3]{abc}}{(a+b+c)r}$

Оценим выр-ие $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$:

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{xyz}} \ge \frac{9\sqrt[3]{abc}^2}{(a+b+c)r} \ge \frac{(a+b+c)}{r}$

Получаем, что минимальное значение суммы равно $\frac{a+b+c}{r}$, при этом она достигается тогда и только тогда, когда $x=y=z=r$, т.е. т. P - центр вписанной окружности.

Ответ: т. P - центр вписанной окружности в $\triangle ABC$.

Место для скобы

Шифр

№3.

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$

1. $n \not\vdots 2$. Тогда у ур-ние $p(t)=0$ обязательно есть хотя бы 1 вещественный корень. По т. Виета, сумма корней -5, а их произведение -3. Т.к. ~~сложение~~ делители числа -3 не дают в сумме -5, то корни ур-ние $p(t)=0$ нецелые. Тогда $p(t)=(t-t_0)q(t)$, где t_0 – корень ур-ние $p(t)=0$, но т.к. $t_0 \notin \mathbb{Z}$ и при умножении $q(t)$ на t_0 должны получиться целые коэффициенты, то коэффициенты многочлена $q(t)$ нецелые числа. У ~~многочлен~~ ур-ние $q(t)=0$ также нецелые корни (если они есть), тогда аналогично показывается, что и его нельзя разложить на произвед. многочленов с целыми множит., а значит при $n \not\vdots 2$ нельзя разложить

2. $n \vdots 2$

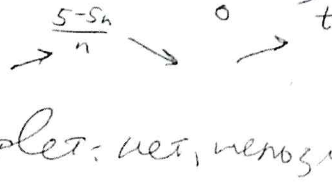
$p'(t) = nt^{n-1} + 5(n-1)t^{n-2}$

$p'(t) = 0$:

$t^{n-2} = 0$ или $n \cdot t + 5(n-1) = 0$

$t = 0$ $\qquad t = \frac{5-5n}{n}$

Т.к. $n \in N$, то $\frac{5-5n}{n} < 0$, тогда $t=0$ – т. минимума



При $t \in (-\infty; \frac{5-5n}{n}]$ $p(t)$ монотонно возрастает, $p(-1) < 0$, а значит при $t<0$ есть решение. Тогда аналогично случаю $n \not\vdots 2$ доказывается, что разложить нельзя

Ответ: нет, нельзя

Недост. обосн.

5 б