Место для скобы

003979

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ЧАУНИН
	Имя	ВЯЧЕСЛАВ
	Отчество	ПАВЛОВИЧ
5.	Дата рождения	Число: 11; Месяц: 10; Год: 2003
6.	Страна	РОССИЯ
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Томская обл.
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Томск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ Лицей при ТПУ

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ______

Место для скобы

Шифр 003979

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
24 б	5.04.21	Гендрико И.Ю.	[подпись]

$\Rightarrow$ допустим, что $\exists$ такое x, что $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2020}$, $x - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2020} - \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$

Тогда $x - \frac{1}{x} = k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\cancel{\frac{x^2-1}{x} = k}$ ~~1) Если $k \neq 0$, то рассмотрим 2 случая~~

~~а) $x \vdots 2$, тогда $x^2 \vdots 2 \Rightarrow x^2-1 \not\vdots 2$, но тогда $\frac{x^2-1}{x} \notin \mathbb{Z}$ ↯~~ | ~~б) $x \not\vdots 2 \Rightarrow x^2-1 \vdots 2$~~

$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x} = k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2-1) \vdots x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-1 \equiv 0 \pmod{x}$

$x^2 \equiv 1 \mod x \Rightarrow$ ~~...~~ $1 \vdots x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$, но тогда: $\frac{1}{1+2020} - 1 \notin \mathbb{Z}$ ↯

или $\frac{1}{1+2020} + 1 \notin \mathbb{Z}$ ↯ $\Rightarrow$ Ответ: такого x не существует

6 б

1	2	3	4	5
6	7	5	6	0

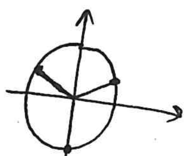
$\sin x + \sin^3 x + 2021 \sin^5 x = \cos 2x + \cos^3 2x + 2021 \cos^5 2x$

Рассм. ф-цию $f(x) = x + x^3 + 2021x^5$, $f'(x) = 1 + 3x^2 + 2021 \cdot 5x^4 > 0$ при $\forall x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)$ - возр. на $\mathbb{R}$, тогда

$f(\sin x) = f(\cos 2x) \Leftrightarrow \sin x = \cos 2x$

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos 2x$



7 б

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - x = 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - x = -2x + 2\pi k, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{array}\right.$ $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

Место для скобы

Шифр 003979

4. $$\frac{x^3}{k+\sqrt[3]{2021^4}\,x}+\frac{\sqrt[3]{2021^4}\cdot x}{k+x^3}\le\frac{3}{2}-\frac{k}{x(x^2+\sqrt[3]{2021^4})},\quad k>0$$

Такие k, при кот. $\exists$ ед. реш. нер-ва.

$a \overset{\text{об}}{=} x^3$

$b \overset{\text{об}}{=} x\sqrt[3]{2021^4}$, $a>0, b>0$

$$\frac{a}{k+b}+\frac{b}{k+a}+\frac{k}{a+b}\le\frac{3}{2}\quad (*)$$

~~По нер-ву Коши-Буняковского-Шварца:~~

$$\left(\frac{a}{k+b}+\frac{b}{k+a}+\frac{k}{a+b}\right)\underset{\underset{((a+b)+(b+k)+(a+k))}{\parallel}}{(2a+2b+2k)}\ge(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{k})^2$$

$$\frac{a}{k+b}+\frac{b}{k+a}+\frac{k}{a+b}\ge\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{k})^2}{2(a+b+k)}$$ ~~, причем „=" достигается только~~

~~в случае $a=b=k$, но тогда $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a})^2}{2(a+a+a)}=\frac{3}{2}$ => нер-во (*) вып-ся <=>~~

~~<=> $a=b=k$~~ $\begin{cases}k=x^3\\ x^3=x\sqrt[3]{2021^4}\\ k=x\sqrt[3]{2021^4}\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt[3]{2021^2}\end{array}\right.\\ k=x^3\end{cases}$ => $\left[\begin{array}{l}k=0\\ k=-2021^2\\ k=2021^2\end{array}\right.$ ~~, т.к. $k>0$~~, то

$k=2021^2$

Ответ: 2021^2

Недост. обоснование

По нер-ву Несбита: $\frac{a}{k+b}+\frac{b}{k+a}+\frac{k}{a+b}\ge\frac{3}{2}$; $a,b,k>0$ =>

нер-во (*) имеет решения <=> $a=b=k$, т.е. $\begin{cases}k=x^3\\ x^3=x\sqrt[3]{2021^4}\end{cases}$ => $\left[\begin{array}{l}k=0\\ k=-2021^2\\ k=2021^2\end{array}\right.$;

т.к. $k>0$, то $k=2021^2$

Ответ: 2021^2

6 б

Место для скобы

Шифр 003979

3. $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$, $n \in \mathbb{Z}$

можно ли представить в виде произв. многочленов с цел. коэф-ми.

$\Rightarrow$ допустим, что можно представить, т.е. $p(t) = q_1(t) q_2(t) \ldots q_k(t)$, $1 < k \leq n$

Тогда $p(1) = q_1(1) q_2(1) \ldots q_k(1) = 1 + 5 + 3 = 9$ если каждый из многочленов имеет целые коэф-ты, то их сумма также целая, т.е. $q_1(1), q_2(1), \ldots, q_k(1)$ - целые числа. Но 9 можно представить ~~много~~ как произведение целых чисел двумя способами с точностью до смены знака и перестановок: $3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$ или $3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1$.

Если $q_1(t) q_2(t) \cdot \ldots \cdot q_k(t) = p(t)$, то можем перемножить многочлены, сумма коэф-в которых равна 1. Получим, что $p(t) = q(t) r(t)$, где $r(1) = 1$, $q(1) = 9$

Нет ответа на вопрос

Недост. обоснование

5 б