Место для скобы

003720

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	Математика
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	БУШ
	Имя	КРИСТИНА
	Отчество	ВЛАДИМИРОВНА
5.	Дата рождения	09 (Число) 01 (Месяц) 2003 (Год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Новосибирская область
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Карасук
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ Технический лицей № 176

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Буш

Место для скобы

Шифр 003720

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20	1.04.21	Корякина Е.Е.	[illegible]

1. Существует ли x, такое, что

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$ являются целыми

Решение: первое и третье число являются противоположные ?

первое: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$

третье: $-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}\right)$

1	2	3	4	5	Σ
4	7	5	2	2	20

В случае если одно из них целое, то и другое тоже целое.

Рассмотрим второе число. Предположу, что оно целое

$x-\frac{1}{x}=n$; $n\in\mathbb{Z}$

$x^2-1-nx=0$

$x^2-nx-1=0$

$x_{1,2}=\frac{n\pm\sqrt{n^2+4}}{2}$

$n^2+4>0$, следовательно существует два действительных решения

число $x-\frac{1}{x}$ должно быть целым, а это возможно ?

при $n=0$; $\left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=-1 \end{array}\right.$

Подставим в первое число значения x_1 и x_2.

$\frac{1}{1}-\frac{1}{1+2021}=1-\frac{1}{2022}$ – не является целым

$-\frac{1}{1}-\frac{1}{1+2021}=-1-\frac{1}{2022}$ – не является целым

Ответ: не существует.

4

Место для скобы

2. решить уравнение

Шифр 003720

$\sin x+\sin^3 x+2020\sin^5 x=\cos(2x)+\cos^3(2x)+2020\cos^5(2x)$

Решение.

Рассмотрим левую и правую часть уравнения как функции $\sin x=m$

$g(m)=m+m^3+2020m^5$

$\cos(2x)=p$

$q(p)=p+p^3+2020p^5$

Можно заметить, что $g(m)=q(p)$ и рассматривать

$f(l)=l+l^3+2020l^5$

$f'(l)=1+3l^2+2020\cdot 5l^4>0$ для любых l, следовательно $f(l)$ возрастающая функция, и можно утверждать, что $m=p$

$\sin x=\cos(2x)$

$\sin x=1-2\sin^2 x$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$; $\sin x=t$, $-1\le t\le 1$

$2t^2+t-1=0$

$D=1+8=9$

$t_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}$

$\left[\begin{array}{l} t_1=-1 \\ t_2=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\sin x=-1$

$x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$

$\sin x=\frac{1}{2}$

$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

Ответ: $\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$ +

3. $f(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, $n>1$, $n\in Z$

при $n=2$ $f(x)$ - мн. чл второй степени можно разложить на множители, но не с целыми коэффициентами

$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$, в данном случае $D=25-12=13$ $f(x)=x^2+5x+3$

$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$, т.е

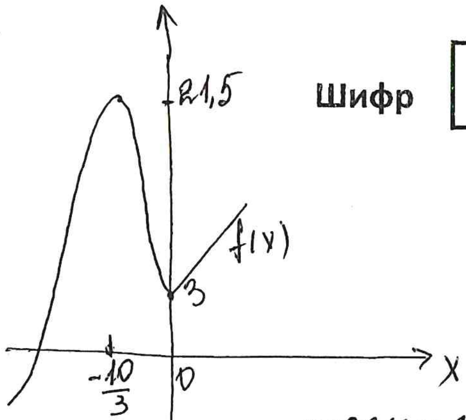
$f(x)=(x-\frac{-5-\sqrt{13}}{2})(x-\frac{-5+\sqrt{13}}{2})$

при $n=3$ $f(x)=x^3+5x^2+3$

$f'(x)=3x^2+10x=x(3x+10)$; $f'(x)=0$ при $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{10}{3} \end{array}\right.$

$f(0)=3$; $f(-\frac{10}{3})\approx 21{,}5$

по рисунку можно видеть, что многочлен имеет один корень, т.е можно разложить на множители f(x), но корень не является целым числом, т.е множители не будут иметь целые коэффициенты.



Многочлен f(x) является приведенным, т.к коэффициент при $x^n = 1$ и все коэффициенты целые числа. Чтобы разложить на множители с целыми коэффициентами любой рациональный корень многочлена должен быть целым числом, значит это могут быть делители числа 3, т.е ± 1; ± 3.

$f(-1) = (-1)^n + 5(-1)^{n-1} + 3$, если n-четное, то $1-5+3 \neq 0$, если n-нечетное, то $-1+5+3 \neq 0$

(-1) не является корнем.

$f(1) = 1^n + 5(1)^{n-1} + 3$

$1+5+3 \neq 0 \Rightarrow$ число 1 корнем не является

проверяю ± 3

четность n !

$f(3) = 3^n + 5 \cdot 3^{n-1} + 3 = 3^n + \frac{5}{3} \cdot 3^n + 3$

$f(-3) = (-3)^n + 5 \cdot (-3)^{n-1} + 3 = (-3)^n + 5 \cdot (-3)^n \cdot (-3)^{-1} + 3 = (-3)^n - \frac{5}{3}(-3)^n + 3$

$f(3) = 3^n(1 + \frac{5}{3}) + 3 = 2\frac{2}{3} \cdot 3^n + 3$ - корнем не является

$f(-3) = (-3)^n(1 - \frac{5}{3}) + 3 = (-\frac{2}{3}) \cdot (-3)^n + 3 \neq 0$ т.к. ни при каких целых n не выполняется

$(-\frac{2}{3})(-3)^n \neq 3$; $(-3)^n \neq \frac{9}{2}$. Целых корней многочлена не существует, значит разложить на линейные множители с целыми коэффициентами невозможно

Для многочленов других степеней не успела рассмотреть.

Место для скобы

Шифр

4. $\frac{x^3}{a+bx}+\frac{bx}{a+x^3}+\frac{a}{x^3+bx}\le\frac{3}{2}$

зная, что $x>0$, и $a>0$

использую в решении известное неравенство при $t>0$

$t+\frac{1}{t}\ge 2$

Предположу:

1) пусть $x^2\ge b$, тогда домножу на x

$x^3\ge xb$, добавлю a

$a+x^3\ge a+xb$ тем самым получу неравенство, содержащее знаменатель выражения

имею право заменить $(a+bx)$ на большее значение $(a+x^3)$ в первоначальном выражении

$\frac{x^3}{a+x^3}+\frac{bx}{a+x^3}+\frac{a}{x^3+bx}\le\frac{3}{2}$

$\frac{x^3+bx}{a+x^3}+\frac{a}{x^3+bx}\le\frac{3}{2}$

$\frac{x^3+bx}{a+x^3}+\frac{a+x^3}{x^3+bx}-\frac{x^3}{x^3+bx}\le\frac{3}{2}$

$2-\frac{x^3}{x^3+bx}\le\frac{3}{2}$

применю известное неравенство

$\frac{x^3+bx}{a+x^3}+\frac{a+x^3}{x^3+bx}\ge 2$

$2x^3\ge x^3+bx$

$x^3\ge bx$

$x^2\ge b$, что соответствует предпол.

т.е a - любое

$\frac{x^3}{x^3+bx}\ge 2-\frac{3}{2}$; $\frac{x^3}{x^3+bx}\ge\frac{1}{2}$;

2) пусть $x^2<b$

$x^3<bx$

$a+x^3<a+bx$, заменю $(a+x^3)$ на большее $(a+bx)$

$\frac{x^3}{a+bx}+\frac{bx}{a+bx}+\frac{a}{x^3+bx}\le\frac{3}{2}$

$\frac{x^3+bx}{a+bx}+\frac{a}{x^3+bx}\le\frac{3}{2}$

$\frac{x^3+bx}{a+bx}+\frac{a+bx}{x^3+bx}-\frac{bx}{x^3+bx}\le\frac{3}{2}$

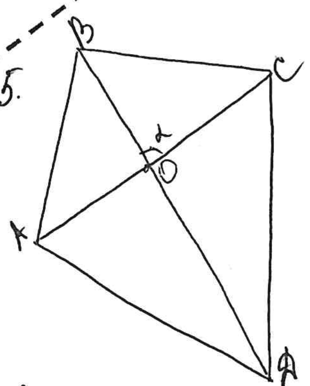
$2-\frac{bx}{x^3+bx}\le\frac{3}{2}$, аналогично (1) $\Rightarrow$ a - любое

Ответ: значение a - любые

Место для скобы

Шифр

5.



Дано

ABCD - выпуклый четырехуг.

$S_{ABCD} = 32$; $\angle BOC = \alpha$

пусть $BC = a$; $AD = b$; $AC = d_1$; $BD = d_2$

$a + b + d_1 = 16$.

какие значения может принимать d_2 - ?

Решение:

Формула S четырехугол. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\alpha$, тогда

$\frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\alpha = 32$

$d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\alpha = 64$

используем неравенство Δ. для ΔBOC и ΔAOD:

если $BD = d_2$, $DO = c$, $BO = d_2 - c$; $AC = d_1$; $AO = l$; $OC = d_1 - l$

$$\left| \begin{array}{l} d_1 - l + d_2 - c > a \\ l + c > b \end{array} \right| +$$

$d_1 + d_2 > a + b$, из условия $a + b = 16 - d_1$

$d_1 + d_2 > 16 - d_1$ следовательно $d_1 < 8$, а $d_2 < 16$

$2d_1 + d_2 > 16$

$d_2 > 16 - 2d_1$

$d_2 > 2(8 - d_1)$

т.к $0 < \sin\alpha < 1$, то можно утверждать, что из $d_1 d_2 \sin\alpha = 64$, следует $d_1 d_2 > 64$

тогда при $d_1 < 8$, $d_2 > 8$

при $d_2 < 16$, $d_1 > 4$,

т.е $4 < d_1 < 8$, а $8 < d_2 < 16$

Ответ: $8 < d_2 < 16$

+