07186

Шифр

ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

ìет	Математика
нт	1
	10 „Б"
ния	Б У Д Ы Л И Н А
	В И К Т О Р И Я
тво	А Л Е К С Е Е В Н А
ождения	0 1 (Число) 0 5 (Месяц) 2 0 0 6 (Год)
а	Россия
ι *(пр: Томская обл., инградская область)*	Кемеровская область
ниципального образования *г, деревня, село, город)*	город
енный пункт *(пр: Томск, ово, Псков)*	Кемерово
е наименование вательного учреждения, ром Вы обучаетесь в е время	МБНОУ „ГКП"

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Викто

Шифр 07186

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
17		Емельянова	Ем

1	2	3	4	5	Σ
7	–	3	–	7	17

Задание №1

$y^2(y-x+2)-y(x+4)+5x+7=0$

$y^3-xy^2+2y^2-xy-4y+5x+7=0$

$y(y^2+2y-4)-x(y^2+y-5)+7=0$

$x=\dfrac{y(y^2+2y-4)+7}{y^2+y-5}$

$x=\dfrac{y^3+2y^2-4y+7}{y^2+y-5}$

$$\begin{array}{r|l} y^3+2y^2-4y+7 & y^2+y-5 \\ \underline{y^3+y^2-5y} & y+1 \\ y^2+y+7 & \\ \underline{y^2+y-5} & \\ 12 & \end{array}$$

$x=\dfrac{(y+1)(y^2+y-5)+12}{y^2+y-5}$

$x=y+1+\dfrac{12}{y^2+y-5}$

ОДЗ:

$y^2+y-5\neq0$

$D=1+20=21$

$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$, т.е. $y\notin\mathbb{Z}$.

Значит y – любое целое число

x может быть целым, только если $\dfrac{12}{y^2+y-5}$ – целое.

Т.е. $y^2+y-5=\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm4;\ \pm6;\ \pm12$ (один из множителей 12)

$y^2+y-5=-12$
$y^2+y+7=0$
$D=1-28<0$
т.е. $\varnothing$

$y^2+y-5=-6$
$y^2+y+1=0$
$D=1-4<0$
т.е. $\varnothing$

$y^2+y-5=-4$
$y^2+y-1=0$
$D=1+4=5$
$y=\dfrac{-1\pm\sqrt5}{2}$, $y\notin\mathbb{Z}$

$y^2+y-5=-3$
$y^2+y-2=0$
$D=1+8=9$
$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \\ y=\dfrac{-1+3}{2}=1 \end{array}\right.$

$y^2+y-5=-2$
$y^2+y-3=0$
$D=1+12=13$
$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, $y\notin\mathbb{Z}$

$y^2+y-5=-1$
$y^2+y-4=0$
$D=1+16=17$
$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$, $y\in\mathbb{Z}$

$y^2+y-5=1$
$y^2+y-6=0$
$D=1+24=25$
$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-1-5}{2}=-3 \\ y=\dfrac{-1+5}{2}=2 \end{array}\right.$

$y^2+y-5=2$
$y^2+y-7=0$
$D=1+28=29$
$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$, $y\notin\mathbb{Z}$

место для скобы

Шифр 07186

$y^2+y-5=3$
$y^2+y-8=0$
$D=1+32=33$
$y=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{2}$, $y\notin Z$

$y^2+y-5=4$
$y^2+y-9=0$
$D=1+36=37$
$y=\frac{-1\pm\sqrt{37}}{2}$, $y\notin Z$

$y^2+y-5=6$
$y^2+y-11=0$
$D=1+44=45$
$y=\frac{-1\pm3\sqrt{5}}{2}$, $y\notin Z$

$y^2+y-5=12$
$y^2+y-17=0$
$D=1+68=69$
$y=\frac{-1\pm\sqrt{69}}{2}$, $y\notin Z$

$y=-2$: $x=-2+1+4$
$x=-5$

$y=1$: $x=1+1-\cancel{4}$
$x=-2$

$y=-3$: $x=-3+1+12$
$x=10$

$y=2$: $x=2+1+12$
$x=15$

Ответ: $(-5;-2)$; $(-2;1)$; $(10;-3)$; $(15;2)$

Задание №3

$\frac{a+b-c}{2c}+\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b}\geq\frac{3}{2}$

$\frac{a^2b+ab^2-abc+b^2c+bc^2-abc+a^2c+ac^2-abc}{2abc}\geq\frac{3}{2}$

$\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2-3abc}{2abc}\geq\frac{3}{2}$

$\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2}{2abc}-\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2}$

$\frac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2}{2abc}\geq3$

$\frac{a}{2c}+\frac{b}{2c}+\frac{b}{2a}+\frac{c}{2a}+\frac{a}{2b}+\frac{c}{2b}\geq3$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)\geq3$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2+c^2}{ac}+\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{a^2+b^2}{ab}\right)\geq3$

Т.к. a, b, c – положительные числа, то самое маленькое положительное число – 1

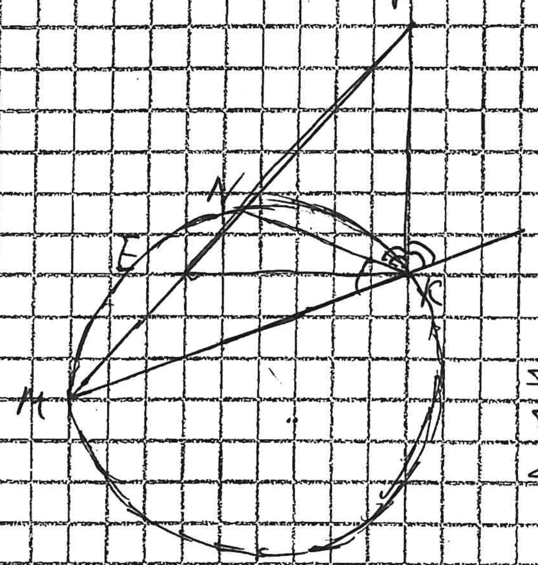
$\frac{a^2+c^2}{ac}=\frac{1^2+1^2}{1\cdot1}=2$, т.е. $\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot3\geq3$

$3\geq3$ – верно, ч.т.д.

место для скобы

Шифр 07186

Задание №5



Дано: $\triangle MNK$; опис. окр-ть $(O;R)$
EK, FK – бис-сы;
$(\cdot)E \in MN$; $(\cdot)F \in MN$;
$KE = KF$

Д-ть: $MK^2 + NK^2 = 4R^2$.

Д-во:

~~Т.к. KF – бис-са, то ∠NKF~~

Т.к. KF и EK – бис-сы, то $\angle FKE = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$, т.е $\triangle FKE$ – прямоуг.

$\left.\begin{array}{l}\triangle FKE \text{ – прямоуг} \\ KE = KF\end{array}\right\} \angle NEK = 45^\circ$

$\angle MEK = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

Пусть $\angle NKE = \angle MKE = \alpha$.

$\angle MNK = 180^\circ - \alpha - 45^\circ = 135^\circ - \alpha$.

$\angle NMK = 180^\circ - \alpha - 135^\circ = 45^\circ - \alpha$

Т.к. $\triangle MNK$ – впис, то по обобщ. т. синусов:

$\frac{MK}{\sin(135^\circ - \alpha)} = 2R$ $\quad \frac{NK}{\sin(45^\circ - \alpha)} = 2R$

$MK = 2R(\sin(135^\circ - \alpha)) = 2R \sin(180^\circ - (45^\circ + \alpha)) = 2R \cdot \sin(45^\circ + \alpha) =$
$= 2R(\sin 45^\circ \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2R(\cos\alpha + \sin\alpha)$

$NK = 2R \sin(45^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2R(\cos\alpha - \sin\alpha)$

$MK^2 + NK^2 = 2R^2(\cos^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cos\alpha + \sin^2\alpha) + 2R^2(\cos^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot$
$\cdot \cos\alpha + \sin^2\alpha) = 2R^2 \cdot (1 + \sin 2\alpha) + 2R^2(1 - \sin 2\alpha) =$
$= 2R^2 + \cancel{2R^2 \sin 2\alpha} + 2R^2 - \cancel{2R^2 \cdot \sin 2\alpha} = 4R^2$, ч.т.д.