

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|------------|------|--------------------|---------------------|
| 665 | | Червонская А.С. | Асер |

$\approx 3 \quad \rho(h) = \rho_0 e^{-\alpha h}; \quad h = 4830 \text{ м} \quad \rho_0 = 10^5 \text{ Па}, \quad T_0 = 273 \text{ К}$

$\rho_0 = 1,29 \text{ кг/м}^3; \quad \alpha = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}; \quad \mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$

ρ_1 - плотность гелия.

$PV = \frac{m}{\mu} RT$ - Уравнение Менделеева - Клапейрона, для гелия в шаре \Rightarrow

$\frac{P\mu}{RT} = \frac{m}{V} = \rho_1$, оболочка шара неэластичная

α температура постоянна $\Rightarrow P = \text{const} = P_0; \quad T = T_0$

$\rho_1 = \frac{P_0 \mu}{RT_0}$

$\sum \vec{F} = m_w \vec{g} - \rho(h) \vec{g} V$

Воздушный шар будет разгоняться пока сила Архимеда будет больше силы тяжести \Rightarrow шар достигнет максимальной скорости в момент, когда $\vec{F}_A + \vec{F}_T = 0 \Rightarrow$

$m_w \vec{g} - \rho(h) \vec{g} V = 0 \quad \vec{g} (m_w - \rho(h) V) = 0 \Rightarrow m_w = \rho(h) V$

$m_w = \rho_1 V + M$, M - масса оболочки

$\rho_1 V + M = \rho_0 e^{-\alpha h} V = \frac{\rho_0}{\rho_1} e^{-\alpha h} (\rho_1 V); \quad 1 + \frac{M}{\rho_1 V} = \frac{\rho_0}{\rho_1} e^{-\alpha h} \Rightarrow$

$\frac{\rho_1 V}{M} = \frac{m}{M} = \frac{1}{\frac{\rho_0}{\rho_1} e^{-\alpha h} - 1} = \frac{e^{\alpha h}}{\rho_0 \frac{RT_0}{\rho_0 \mu} - e^{\alpha h}} = \frac{e^{1,25 \cdot 10^{-4} \cdot 4830}}{129 \cdot 8,31 \cdot 273 / (10^5 \cdot 4 \cdot 10^{-3}) - e^{1,25 \cdot 10^{-4} \cdot 4830}} \approx \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{m}{M} = \frac{1}{3} \approx 0,33$ ✓

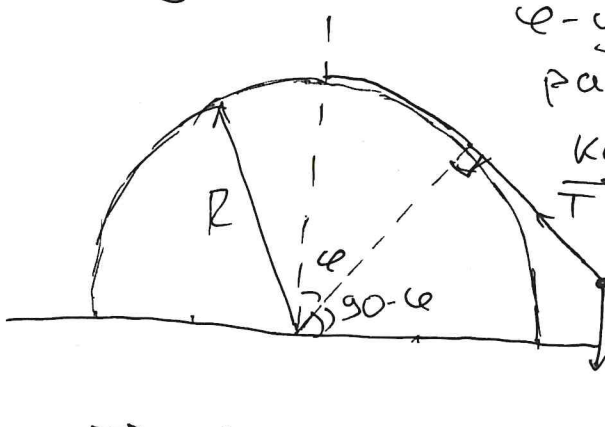
108

№2 Дано: R, b

Решение:

L - длина нити, $L = \frac{1}{4} \cdot 2\pi R = \frac{\pi}{2} R$

Тренируем массу нити, тогда её часть ~~находящаяся~~ не соприкасающаяся с полусферой будет являться прямой, которая будет касательной к полусфере.



φ - угол между осью вращения и радиусом проведенным в точку касания нити с окружностью
 $b = \frac{\varphi R}{L} = \frac{2}{\pi} \varphi$ (по условию) \Rightarrow
 $\varphi = \frac{\pi}{2} b$

$\sum \vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$

x: $-m a_x = -T \cos \varphi$

y: $0 = T \sin \varphi - mg \Rightarrow T = \frac{mg}{\sin \varphi}$

$a_x = \omega^2 r$, r - расстояние от оси вращения до шарика

~~масса~~ $+ m \omega^2 r = T \cos \varphi = \frac{mg}{\sin \varphi} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{r} \frac{1}{\sin \varphi}$

$r = R \cdot \sin \varphi + (L - bL) \cdot \cos \varphi = R \sin \varphi + L(1-b) \cos \varphi =$
 $= R \left(\sin \varphi + \frac{\pi}{2} (1-b) \cos \varphi \right)$; $\varphi = \frac{\pi}{2} b$

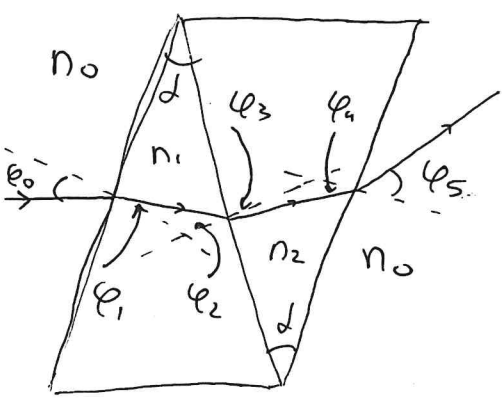
$\omega^2 = \frac{g}{R} \left[\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} b} \left(\frac{g}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} b + \frac{\pi}{2} (1-b) \cos \frac{\pi}{2} b \right) \right) \right]^{-1}$
 $= \frac{g}{R} \left[\sin \frac{\pi}{2} b \left(\frac{g}{2} b + \frac{\pi}{2} (1-b) \right) \right]^{-1}$

Ответ $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \left[\sin \frac{\pi}{2} b \left(\frac{g}{2} b + \frac{\pi}{2} (1-b) \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$ ✓ 10б.

4. Дано $n_2 - n_1 = 0,2$; $d = 10^\circ$

Решение

Все углы в данной задаче малы $\Rightarrow \sin \varphi \approx \varphi$



По закону Снеллиуса

$$\varphi_0 n_0 = \varphi_1 n_1; \varphi_2 n_1 = \varphi_3 n_2; \varphi_4 n_2 = \varphi_5 n_0$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = d; \varphi_3 + \varphi_4 = d \Rightarrow$$

$$\varphi_2 = d - \varphi_1; \varphi_4 = d - \varphi_3$$

$$\varphi_1 n_1 = \varphi_0 n_0$$

$$\varphi_3 n_2 = n_1 \varphi_2 = n_1 d - \varphi_1 n_1 = n_1 d - \varphi_0 n_0$$

$$\begin{aligned} \varphi_5 n_0 &= \varphi_4 n_2 = d n_2 - \varphi_3 n_2 = \\ &= d n_2 - n_1 d + \varphi_0 n_0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\varphi_5 = \varphi_0 + d \frac{n_2 - n_1}{n_0}$$

$n_2 - n_1$ перпендикуляры проходящие через открытые грани будут параллельны \Rightarrow

φ - угол между отклонения луча, $\varphi = \varphi_5 - \varphi_0 = d \frac{n_2 - n_1}{n_0}$

$n_2 - n_1 > 0 \Rightarrow$ луч отклонится вверх

$$\varphi = d \frac{n_2 - n_1}{n_0} = \frac{d}{5n_0}$$

В условии ничего не сказано про среду с показателем n_0

Если стеклянные призмы расположены в воздухе,

то $n_0 \approx 1 \Rightarrow \varphi = \frac{10^\circ}{5 \cdot 1} = 2^\circ$

Ответ: $\varphi = \frac{2^\circ}{n_0}$; Если $n_0 = 1$ $\varphi = 2^\circ$ ✓
 Луч отклонится вверх

20б.

Место для скобы

Шифр

25 Дано: $F = 1000 \text{ Н}$, $a_{sc} = 30 \text{ м/с}^2$, $S = 100 \text{ м}$,
 $m = 250 \text{ кг}$, $v_0 = 0$

Решение

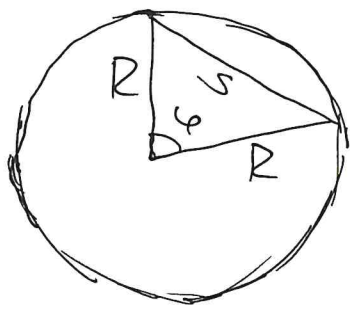
~~$S^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \varphi = 2R^2(1 - \cos \varphi) = 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \Rightarrow$~~

~~$S = 2R \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|$~~

~~$v = v_0 + at$~~

~~$F = ma$ (2 закон Ньютона) \Rightarrow~~

~~$a = \frac{F}{m}$~~



~~$v = v_0 + at = \frac{F}{m}t \Rightarrow$~~

~~$l = l_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 \Rightarrow \varphi = \frac{l}{R} = \frac{1}{2} \frac{F}{mR} t^2$~~

~~$S = 2R \left| \sin \left(\frac{F t^2}{4mR} \right) \right|$~~

~~$a_{sc} = \frac{v^2}{R} = \frac{F^2 t^2}{m^2 R} = 4 \frac{F}{m} \left(\frac{F t^2}{4mR} \right) \Rightarrow \left(\frac{F t^2}{4mR} \right) = \frac{m a_{sc}}{4F}$~~

~~$S = 2R \left| \sin \left(\frac{m a_{sc}}{4F} \right) \right| \Rightarrow R = \frac{S}{2 \left| \sin \left(\frac{m a_{sc}}{4F} \right) \right|} =$~~

~~$= \frac{100 \text{ м}}{2 \left| \sin \left(\frac{250 \cdot 30}{4000} \right) \right|} = \frac{50 \text{ м}}{\left| \sin 1,875 \right|} \approx \frac{50 \text{ м}}{0,954} = 52,4 \text{ м}$~~

Ответ: $R = 52,4 \text{ м}$ ✓ 20б.

~~21 Дано: $\varepsilon = 12 \text{ В}$, $r = 2 \text{ Ом}$, $U = 12 \text{ В}$, $P_0 = 1 \text{ Вт}$~~

~~Решение: $P_c = \frac{\varepsilon^2}{R+r}$, P_{max} достигается, когда~~

~~$R \ll r \Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R+r} \approx \frac{\varepsilon}{r}$, $P_0 = I^2 R_n = \frac{\varepsilon^2 R_n}{r^2} \Rightarrow R_n = \frac{P_0 r^2}{\varepsilon^2}$~~

~~$P_1 = \frac{U^2}{R_n} = \frac{\varepsilon^2 U^2}{P_0 r^2} = \frac{12^2 \cdot 12^2}{2^2 \cdot 1} \text{ Вт} = \left(\frac{144}{2} \right)^2 = 72^2 \text{ Вт} = 5184 \text{ Вт}$~~

21 Дано: $\varepsilon = 12 \text{ В}$ $r = 2 \text{ Ом}$ $P_0 = 1 \text{ Вт}$ $U = 12 \text{ В}$
Решение

Допустим лампочка и стартер подключены параллельно $\Rightarrow I = \frac{\varepsilon}{r + \frac{R_c R_n}{R_c + R_n}}$, $I_c R_c = I_n R_n \Rightarrow I_c + I_n = I$

$$\frac{\varepsilon}{r + \frac{R_c R_n}{R_c + R_n}} = I_c + \frac{R_c}{R_n} I_c = I_c \frac{R_c + R_n}{R_n} \Rightarrow$$

$$I_c = \frac{\varepsilon R_n}{(R_c + R_n)r + R_c R_n} = \frac{\varepsilon R_n}{R_c(R_n + r) + r R_n}$$

$$P_c = I_c^2 \cdot R_c = \frac{\varepsilon^2 R_n^2}{R_n + r} \frac{R_c}{(R_c(R_n + r) + r R_n)^2}$$

P_c - максимальна по условию $\Rightarrow \frac{dP_c}{d(R_c(R_n + r))} = 0$

$$R_c(R_n + r) = R_1$$

$$\frac{\varepsilon^2 R_n^2}{R_n + r} \left(\frac{R_1}{(R_1 + r R_n)^2} \right)' = 0 \Leftrightarrow (R_1 + r R_n)^2 - 2(R_1 + r R_n) R_1 = 0 \Rightarrow (R_1 + r R_n)(r R_n - R_1) = 0 \Rightarrow R_1 = r R_n$$

$$R_c(R_n + r) = r R_n \Rightarrow R_c = \frac{r R_n}{R_n + r}$$

$$I_n = \frac{\varepsilon R}{r R_n + r R_c R_n} = \frac{\varepsilon \cdot r R_n}{2 r R_n (R_n + r)} = \frac{\varepsilon}{R_n + r}$$

$$P_0 = I_n^2 R_n = \frac{\varepsilon^2}{(R_n + r)^2} R_n \quad R_n^2 \cdot P_0 + (2 r P_0) R_n = \varepsilon^2 R_n$$

$$R_n = \frac{\varepsilon^2 - 2 r P_0}{P_0} = \frac{\varepsilon^2}{P_0} - 2 r$$

$$P_1 = \frac{U^2}{R_n} = \frac{U^2}{\left(\frac{\varepsilon^2}{P_0} - 2 r\right)} = \frac{12^2}{\left(\frac{12^2}{1} - 2 \cdot 2\right)} \text{ Вт} = \frac{144}{144 - 4} \text{ Вт} = \frac{144}{140} \text{ Вт} \approx 1,03 \text{ Вт}$$

Ответ: $P_1 = 1,03 \text{ Вт}$ — 6б.