ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

081685

Шифр

мет	МАТЕМАТИКА
ант	1
:	11
лия	БОРОДИНОВА
	ЕКАТЕРИНА
ство	АНДРЕЕВНА
рождения	22 (Число) 07 (Месяц) 2005 (Год)
на	Российская Федерация
н *(пр: Томская обл., инградская область)*	Санкт-Петербург
ниципального образования *т, деревня, село, город)*	Город
енный пункт *(пр: Томск, ово, Псков)*	Санкт-Петербург
е наименование овательного учреждения, ором Вы обучаетесь в е время	ГБОУ СОШ №80

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail езультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Бор

Место для скобы

Шифр 08168

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21	6.04	Коряжкина Е.Е.	[signature]

1	2	3	4	5	Σ
7	0	2	6	5	21

(1) $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7y^2 - 42y + 33 = 0$

$7y^2 - 42y + 63 = 7(y^2 - 6y + 9) = 7(y-3)^2$

$2x^2(1+z^2) + z^2 + 7(y-3)^2 - 30 = 0$

$1 + z^2 > 0$, $(y-3)^2 \geq 0 \Longrightarrow z^2 - 30 < 0$

(иначе выражение слева > 0)

в выражении есть только вторая степень z, поэтому посмотрим на то, каким может быть z по модулю.

$z^2 - 30 \Longrightarrow |z| \leq 5$

(1) $|z| = 5$ $\quad 52x^2 + 7(y-3)^2 - 5 = 0$

• $x = 0$ $\quad 7(y-3)^2 = 5$, но это невозможно, так как 5 не делится на 7 ?!!

• $x \neq 0$ $\quad \underbrace{(52x^2 - 5)}_{\vee\, 0} + 7(y-3)^2 > 0$?!!

(2) $|z| = 4$ $\quad 34x^2 + 7(y-3)^2 - 14 = 0$

$\vdots 7 \quad \vdots 7 \quad \vdots 7 \Rightarrow 34x^2 \vdots 7 \Rightarrow x \vdots 7$

(7 - простое)

• $x \vdots 7$, $x \neq 0$ $\quad \underbrace{(34x^2 - 14)}_{\vee\, 0} + 7(y-3)^2 > 0$?!!

• $x = 0$ $\quad (y-3)^2 = 2$, что невозможно, т.к. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$?!!

(3) $|z| = 3$ $\quad 20x^2 + 7(y-3)^2 - 21 = 0$

$\vdots 7 \quad \vdots 7 \quad \vdots 7 \Rightarrow 20x^2 \vdots 7 \Rightarrow x \vdots 7$

(7 - простое)

• $x \vdots 7$, $x \neq 0$ $\quad \underbrace{(20x^2 - 21)}_{\vee\, 0} + 7(y-3)^2 > 0$?!!

• $x = 0$ $\quad (y-3)^2 = \sqrt{3}$, что невозможно т.к. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$?!!

(4) $|z| = 2$ $\quad 10x^2 + 7(y-3)^2 - 26 = 0$

$10x^2 \le 26$, иначе $(10x^2 - 26) + 7(y-3)^2 > 0$

$x^2 \le \frac{26}{10}$ $\quad |x| \le 1$

- $|x| = 1$ $\quad 10 + 7(y-3)^2 - 26 = 0$

  $7(y-3)^2 = 16 \not\vdots\, 7$?!!

- $x = 0$ $\quad 7(y-3)^2 = 26 \not\vdots\, 7$?!!

(5) $|z| = 1$ $\quad 4x^2 + 7(y-3)^2 - 29 = 0$

$4x^2 \le 29$, иначе $(4x^2 - 29) + 7(y-3)^2 > 0$

$x^2 \le \frac{29}{4}$ $\quad |x| \le 2$

- $|x| = 2$ $\quad 16 + 7(y-3)^2 - 29 = 0$

  $7(y-3)^2 = 13 \not\vdots\, 7$?!!

- $|x| = 1$ $\quad 4 + 7(y-3)^2 - 29 = 0$

  $7(y-3)^2 = 25 \not\vdots\, 7$?!!

- $x = 0$ $\quad 7(y-3)^2 = 29 \not\vdots\, 7$?!!

(6) $z = 0$ $\quad 2x^2 + 7(y-3)^2 - 30 = 0$

$2x^2 \le 30$, иначе $(2x^2 - 30) + 7(y-3)^2 > 0$

$x^2 \le 5$ $\quad |x| \le 3$

- $|x| = 2$ $\quad 8 + 7(y-3)^2 - 30 = 0$

  $7(y-3)^2 = 22 \not\vdots\, 7$?!!

- $|x| = 3$ $\quad 18 + 7(y-3)^2 - 30 = 0$

  $7(y-3)^2 = 12 \not\vdots\, 7$?!!

Место для скобы

Шифр 08168

• $|x| = 1 \qquad 2 + 7(y-3)^2 - 30 = 0$

$$7(y-3)^2 = 28$$

$$(y-3)^2 = 4$$

$$y - 3 = 2 \ \vee \ y - 3 = -2$$

$$y = 5 \ \vee \ y = 1 \qquad |x| = 1 \quad z = 0$$

• $x = 0 \qquad 7(y-3)^2 = 30 \not\vdots\, 7$!!!

Итак: $|x| = 1, \quad y = 1 \vee y = 5, \quad z = 0$

Проверим: $2(-1)^2 + 7\cdot 1^2 - 42 + 33 = 9 - 42 + 33 = 0$ +

$2\cdot 1^2 + 7\cdot 1^2 - 42 + 33 = 9 - 42 + 33 = 0$ +

$2(-1)^2 + 7\cdot 5^2 - 42\cdot 5 + 33 = 177 - 210 + 33 = 0$ +

$2\cdot 1^2 + 7\cdot 5^2 - 42\cdot 5 + 33 = 177 - 210 + 33 = 0$ +

Ответ: $(-1, 1, 0)$

$(-1, 5, 0)$

$(1, 1, 0)$

$(1, 5, 0)$

② ~~$2^{\lg(x^2-2023)} - \lg_2(x^2 - 2022) = 0$ ... $\lg(x^2-2023) \le$ ... [illegible]~~

③ $\forall\, a, b, c > 0 \qquad \dfrac{2a}{3(b+c)} + \dfrac{2b}{3(a+c)} + \dfrac{2c}{3(a+b)} \geqslant 1$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{3}{2}$$

Место для скобы

Шифр 08168

1 Пусть $0 < a < b < c$ (такое допущение можно сделать т.к. a, b и c можно поменять местами и неравенство не изменится)

Далее воспользуемся теоремой об одноименных и противоположных наборах. Если $a < b < c$, $x < y < z$, то сумма $a \cdot \ldots + b \cdot \ldots + c \cdot \ldots$ будет максимальной при $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$, а минимальной при $a \cdot z + b \cdot y + c \cdot x$. Эта теорема обобщается на наборы любой длины и доказывается по индукции. Также её можно обобщить на более чем два набора. То есть:

$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

$b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ = максимальная сумма вида:

$\ldots$

$k_1 < k_2 < \ldots < k_n$

$a_1 b_{i_1} \ldots k_{j_1} + a_2 b_{i_2} \ldots k_{j_2} + \ldots + a_n b_{i_n} \ldots k_{j_n}$

(b_{i_1}) (c_{k_c}) – перестановки (b_e), (c_e)

– при b_{i_n} – максимальном из (b_e)

$b_{i_{n-1}}$ – втором по значению из (b_e)

$\ldots$

b_{i_1} – минимальном из (b_e) –//–//– для c.

Рассмотрим наборы: $a < b < c$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{b+c}} < \frac{1}{\sqrt[3]{a+c}} < \frac{1}{\sqrt[3]{a+b}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{b+c}} < \frac{1}{\sqrt[3]{a+c}} < \frac{1}{\sqrt[3]{a+b}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{b+c}} < \frac{1}{\sqrt[3]{a+c}} < \frac{1}{\sqrt[3]{a+b}}$$

$a < b < c$

$a+b < a+c < b+c$

$\frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+c} > \frac{1}{b+c}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{a+b}} > \frac{1}{\sqrt[3]{a+c}} > \frac{1}{\sqrt[3]{b+c}}$

$\frac{1}{G_n} \geq \frac{1}{A_n} \Rightarrow G_n \leq A_n$

максимальное значение $= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \Rightarrow$

$$\geq \frac{a}{\sqrt[3]{b+c}\sqrt[3]{a+c}\sqrt[3]{a+b}} + \frac{b}{\ldots} + \frac{c}{\ldots} = \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq$$

$$\geq \frac{a+b+c}{\frac{1}{3}(a+b+b+c+c+a)} = \frac{3}{2} \longrightarrow \text{неравенство доказано}$$

+

Место для скобы

Шифр

(4) $ax^3 - ax^2 + bx + b$ $\quad x_1, x_2, x_3$ — корни

$a, b \neq 0$ $\quad$ (!) $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) = -1$

$$ax^3 - ax^2 + bx + b = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) =$$

$$= a\left(x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2\right)(x-x_3) =$$

$$= a\left(x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x - x_1x_2x_3\right) =$$

$$= ax^3 - a(x_1+x_2+x_3)x^2 + a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x - ax_1x_2x_3$$

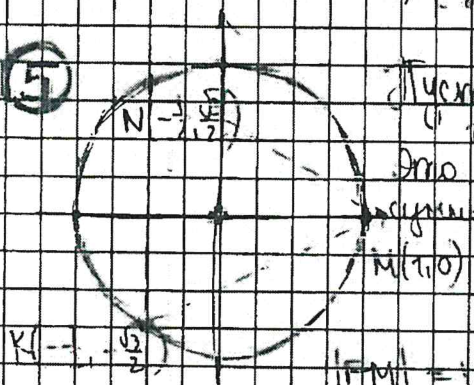
Значит у этих двух полиномов одинаковые коэффициенты.

$$x_1+x_2+x_3 = 1$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}} = -1$$

$$\Rightarrow (x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) = -1$$

(5)



Пусть окружность единичная и вершины треугольника — $M(1,0)$, $N(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $K(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Это корректно т.к. мы хотим доказать одинаковость суммы. Будем считать, что F лежит выше оси ~~нашей~~ абсцисс (картинка симметрична относительно неё) $\quad F(x, \sqrt{1-x^2})$

$$|FM| = \sqrt{(x-1)^2 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \sqrt{x^2-2x+1+1-x^2} = \sqrt{2-2x}$$

$$|FM|^4 = (2-2x)^2$$

$$|FN| = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\cancel{x^2}+x+\frac{1}{4}+1-\cancel{x^2}+\frac{3}{4}-\sqrt{3-3x^2}} =$$

$$= \sqrt{x+2-\sqrt{3-3x^2}}$$

$$|FN|^4 = \left(x+2-\sqrt{3-3x^2}\right)^2 = x^2+4+3-3x^2+4x-(2x+4)\sqrt{3-3x^2} =$$

$$= -2x^2+4x+7-(2x+4)\sqrt{3-3x^2}$$

Место для скобы

Шифр

$|FK| = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}+1-x^2+\frac{3}{4}+\sqrt{3-3x^2}} =$

$= \sqrt{x+2+\sqrt{3-3x^2}}$

$|FK|^4 = \left(x+2+\sqrt{3-3x^2}\right)^2 = x^2+4+3-3x^2+x^2+4+(2x+1)\sqrt{3-3x^2} =$

$= -2x^2+4x+7+(2x+4)\sqrt{3-3x^2}$

$|FM|^4 + |FN|^4 + |FK|^4 =$

$= \cancel{4x^2} - \cancel{8x} + 4 -$?

$- \cancel{2x^2} - \cancel{4x} + 7 - \cancel{(2x+4)\sqrt{3-3x^2}} -$

$- \cancel{2x^2} + \cancel{4x} + 7 + \cancel{(2x+4)\sqrt{3-3x^2}} =$

$= 4+7+7 = \underline{18}$

Проверим: $F_0 = M$:

$|F_0M| = 0$

$|F_0N| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \sqrt{3} = |F_0K|$

$|F_0M|^4 + |F_0N|^4 + |F_0K|^4 = 0+9+9 = \underline{18}$

2. $2^{\lg(x^2-2023)} = \lg\left(2^{x^2-2022}\right) = (x^2-2022)\lg 2 \qquad k = x^2-2022$

$2^{\lg k} = (k+1)\lg 2$

$k \to 0: \quad 2^{\lg k} \to 0 \qquad (k+1)\lg 2 \to \lg 2 > 0$

$\left(2^{\lg k}\right)' = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{k}\cdot\ln 2\cdot 2^{\lg k}$

$\left((k+1)\lg 2\right)' = \lg 2$