Место для скобы

ОРМО II-23-М-5

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

Шифр

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	БОГДАНОВ
	Имя	МИХАИЛ
	Отчество	ВАЛЕРЬЕВИЧ
5.	Дата рождения	16 (Число) 02 (Месяц) 2005 (Год)
6.	Страна	РОССИЯ
7.	Регион *(пр: Томская обл., Калининградская область)*	Омская область
8.	Вид муниципального образования *(пр: пгт, деревня, село, город)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Омск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время	БОУ г. Омска „Лицей N64"

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись БМВ

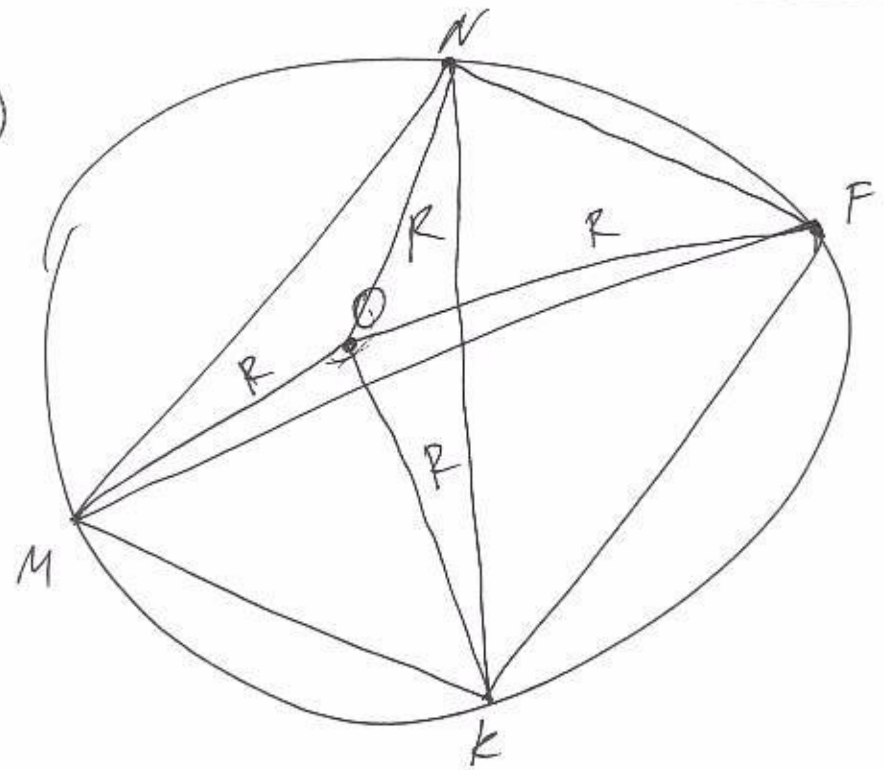
Место для скобы

Шифр ОРМО II-23-М-5

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
19	31.03	Коряченева Е.Е.	[illegible]

5)



Дано:

NMK - равносторонн.

~~[illegible]~~

Д-ать:

$FN^4+FM^4+FK^4=const.$

Рассмотрим $\triangle MOF$: $MO=OF$ - радиусы и содержит MF; $\triangle KOF$: $KO=OF$; содержит KF; $\triangle NOF$: $NO=OF$, содержит FN. Также углы этих $\triangle$: ~~[illegible]~~ Поэтому $FN^4+FM^4+FK^4=const.$?

1	2	3	4	5	Σ
5	0	7	7	0	19

Место для скобы

Шифр ОРМОП-23-М-5

3) $\frac{2a}{3(b+c)}+\frac{2b}{3(a+c)}+\frac{2c}{3(a+b)} \overset{?}{\geq} 1$; $a, b, c > 0$.

$\frac{2}{3}\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right) \overset{?}{\geq} 1 \mid \cdot \frac{3}{2}$.

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \overset{?}{\geq} \frac{3}{2}$. Докажем, что $x+\frac{1}{x} \geq 2, \forall x>0$.

$x+\frac{1}{x} \overset{?}{\geq} 2 \mid \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \overset{?}{\geq} 1$; $\frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$, по нер-ву Коши. Тогда:

$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+c}{a+c} \geq 2$; $\frac{b+a}{a+c}+\frac{a+c}{b+a} \geq 2$; $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b} \geq 2$, т.к. $a, b, c > 0$, то и все их суммы >0. Запишем эти неравенства в другом виде:

$$\begin{cases} \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c} \geq 2-\left(\frac{c}{b+c}+\frac{c}{a+c}\right) \\ \frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a} \geq 2-\left(\frac{a}{a+c}+\frac{a}{a+b}\right) \\ \frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b} \geq 2-\left(\frac{b}{b+c}+\frac{b}{a+b}\right) \end{cases}$$

, сложим их:

$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right) \geq 6-\left(\frac{c+b}{b+c}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{a+b}{a+b}\right)$;

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$, что и является исходным нер-вом.

Место для скобы

Шифр ОРМО II-23-М-5

4) $ax^3-ax^2+bx+b=0 \mid \cdot \frac{1}{a}$, т.к. $a\neq 0$.

$x^3-x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b}{a}=0$, корни этого уравнения x_1, x_2, x_3.

Тогда по Теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1. \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{b}{a}. \\ x_1x_2x_3=-\frac{b}{a}, \end{cases}$$ ни один из корней $\neq 0$, т.к. $b\neq 0$.

$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}}=-1.$

+

1) $2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$

$(z^2+1)(2x^2+1)+7y^2-42y+32=0$, заметим, что

$(z^2+1)(2x^2+1)>0$, при $\forall x,z$. Тогда $7y^2-42y+32<0$, чтобы их сумма была меньше 0. $f(x)=7x^2-42x+32$;

$x_в=\frac{42}{14}=3$, т.к. ветви параболы направлены вверх, то мин. значение будет в вершине. Также $f(0)=32$; $f(1)=-3 \Rightarrow$ т.к. парабола симметрична относительно ~~вершины~~ прямой $x=x_в \Rightarrow$ $f(x)<0$ на отрезке $[1;5]$. ? Рассмотрим эти значения, · номер-я.

$f(y)=7y^2-42y+33$:

$y=1$: $f(y)=-3 \Rightarrow (z^2+1)(2x^2+1)=3$, т.к. числа целые, то только при $z=0$ и $x=\pm 1$.

$y=2$: $f(y)=-24 \Rightarrow (z^2+1)(2x^2+1)=24$, $2x^2+1$ - нечетно. Тогда оно может быть лишь $1, 3$. При $2x^2+1=1$; $(z^2+1)=24 \Rightarrow z^2=23$, $z\notin \mathbb{Z}$; при 3, $z^2+1=8$; $z^2=7$; $z\notin \mathbb{Z}$. Тогда $y\neq 2$.

$y=3$: $f(y)=-31 \Rightarrow (z^2+1)(2x^2+1)=31$, аналогично для $x,z\in\mathbb{Z}$ - это невозможно, $y\neq 3$. Для $y=4$ и $y=5$ - аналогично для $y=2$, $y=1$

Место для скобы

Шифр ОРМО II-23-М-5

1) → При $y=4$ — решений x, z нет. При $y=5$: $x=\pm 1$, $z=0$.

Ответ: $(1,1,0)$; $(-1,1,0)$; $(1,5,0)$; $(-1,5,0)$.

$\pm$

2) $2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{x^2-2022} = 0$, Пусть $t = x^2-2022$;

$2^{\lg(t-1)} = \lg 2^t$; $t-1>0 \Rightarrow t>1$; $2^t>0$ при $\forall t$.

$f(t) = 2^{\lg(t-1)}$; $g(t) = \lg 2^t$, заметим, что обе функции возрастают на всей ООФ, тогда $f(t)=g(t)$, имеет не более одного корня, т.к. графики монотонновозрастающих функций не могут пересечься более 1 раза. $f(2)=1$; $g(2)=\lg 4<1 \Rightarrow f(2)>g(2)$;

$f(10) = 2^{\lg 9} < 2$; $g(10) = \lg 1024 > 3 \Rightarrow f(10)<g(10)$;

таким образом уравнение $f(t)=g(t)$ — имеет ровно одно решение t_1. $x^2-2022=t_1$; $x^2=2022+t_1$, т.к. $t_1 \in (1; +\infty)$. $t_1>1 \Rightarrow$ будет два решения $x_{1,2} = \pm\sqrt{2022+t_1}$.

Ответ: 2 решения

$+$