ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004506

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

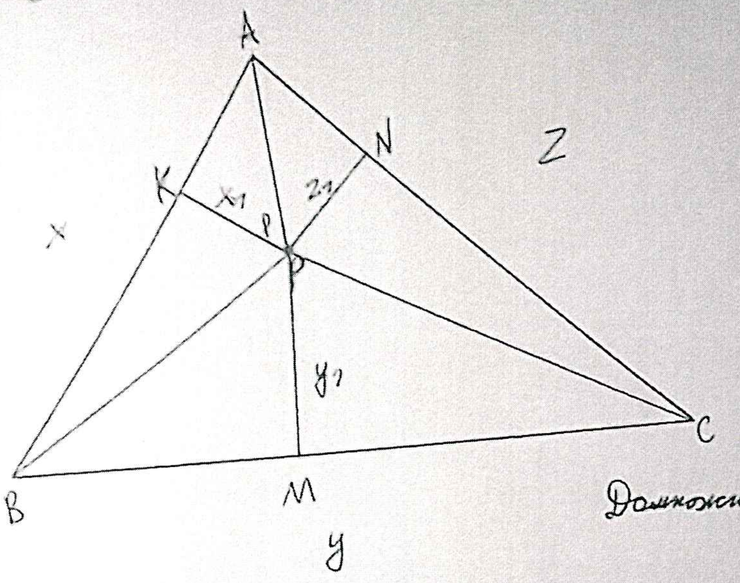
1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Б Е Й Д И Н А
	Имя	Д А Р Ь Я
	Отчество	А Л Е К С Е Е В Н А
5.	Дата рождения	2 9 (число) 0 4 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Ростов-на-Дону
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ "Школа 65" с углубленным изучением английского языка

1	2	3	4	5	Σ
7	7	~~3~~ 1	6	6	~~29~~ 27

Задание 5.

Шифр 004506

5



Пусть, $AB = x$, $AC = z$, $BC = y$,

$BM = y_1$, $PN = z_1$, $PK = x_1$

$S_{ABC} = S_{APC} + S_{APB} + S_{BPC} = \frac{1}{2} x \cdot x_1 + \frac{1}{2} y \cdot y_1 + \frac{1}{2} z \cdot z_1$ (проекции т. P $\perp$ сторонам $\triangle ABC$ => это высоты $\triangle APC$, $\triangle APB$ и $\triangle BPC$)

$2S_{ABC} = x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + z \cdot z_1$

Домножим это равенство на $\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1}$

$$2S_{ABC} \left(\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1}\right)(x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + z \cdot z_1) = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{x \cdot y \cdot y_1}{x_1} + \frac{x \cdot z \cdot z_1}{x_1} + \frac{y \cdot x \cdot x_1}{y_1} + \frac{y \cdot z \cdot z_1}{y_1} + \frac{z \cdot x \cdot x_1}{z_1} + \frac{z \cdot y \cdot y_1}{z_1} = x^2 + y^2 + z^2 + xy\left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{x_1}{y_1}\right) + xz\left(\frac{x_1}{z_1} + \frac{z_1}{x_1}\right) + yz\left(\frac{y_1}{z_1} + \frac{z_1}{y_1}\right)$$

Т.к. $\frac{x_1}{y_1}$ и $\frac{y_1}{x_1}$ – взаимообр. числа (по неравенству о средних), то

$\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1} \geq 2$ (данные числа - положительные)

Таким же образом $\frac{x_1}{z_1} + \frac{z_1}{x_1} \geq 2$ и $\frac{y_1}{z_1} + \frac{z_1}{y_1} \geq 2$.

$\Downarrow$

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1}\right) + xz\left(\frac{x_1}{z_1} + \frac{z_1}{x_1}\right) + yz\left(\frac{y_1}{z_1} + \frac{z_1}{y_1}\right) \geq x_2 + 2xy + y_2 + 2yz + z^2 + 2xz$$

почему?

Минимальное значение суммы будет получено при равенстве левой и правой части, т.к. данное неравенство будет достигнуто только при равенстве x_1, y … => $x_1 = y_1 = z_1$ => P – центр впис. окр. (по св. радиуса провед. в т. кас. $x_1 \perp x$, $z_1 \perp z$, $y_1 \perp y$)

Место для скобы

Шифр 004506

Задание 2.

$\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\sin^9(2x)=\cos(\overset{4}{\cancel{2}}x)+\cos^5(4x)+2020\cos^5(4x)$

Пусть, $\sin(2x)=a$, а $\cos(4x)=b$.

$f(a)=a+a^5+2020a^9$

$f(b)=b+b^5+2020b^9$

Найдём производную от $f(a)$:

$f'(a)=1+5a^4+18.180a^8$

a^4 и $a^8>0$ (чётные степени)

Т.к. a^4 и $a^8>0$, то $f(a)$ - монотонно возрастающая.

Тогда, $f(a)=f(b)$ только при $a=b$

$\Downarrow$

$\cos(4x)=\sin(2x)$

$1-2\sin^2(2x)=\sin(2x)$

$2\sin^2(2x)+\sin(2x)-1=0$

$D=9$

$\sin(2x)=\frac{-1\pm 3}{4}$

$\sin(2x)=\frac{1}{2}$ $\quad \sin(2x)=-1$

$2x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi k \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{12}+\pi k$

$2x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi n \Rightarrow x_2=\frac{5\pi}{12}+\pi n$

$2x_3=-\frac{\pi}{2}+2\pi l \Rightarrow x_3=-\frac{\pi}{4}+\pi l$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{12}+\pi k, k\in Z$; $x_2=\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in Z$; $x_3=-\frac{\pi}{4}+\pi l, l\in Z$.

Место для скобы

Шифр 004506

Задание 3.

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$

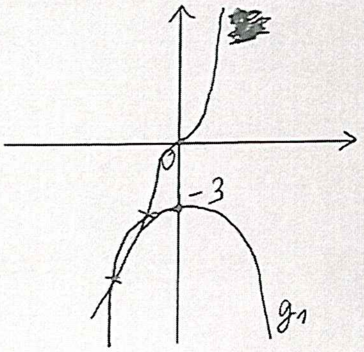
По т. Виета получаем, что

$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 + \ldots + t_l = -5 \\ t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot \ldots \cdot t_l = 3 \end{cases}$ (Пусть, t_i - корни) $i \in [1; l]$, i - целое

$t^n + 5t^{n-1} + 3 = 0$

$t^n = -5t^{n-1} - 3$

При n - нечётное число будет получено не более 2ух отриц. корней.



$g_1 = t^n$; $g_2 = -5t^{n-1} - 3$

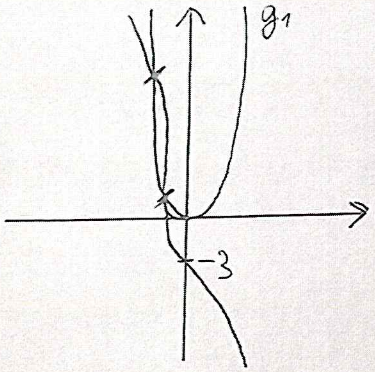
По т. Виета кол-во отриц. корней чётно, т.к.

$t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \cdot \ldots \cdot t_l = 3 \Rightarrow > 0$

$\Downarrow$

Будет 2 отриц. корня

При n - чётное число



$g_1 = t^n$; $g_2 = 5t^{n-1} - 3$

Будет не более 2ух отриц. корней.

$\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = -5 \\ t_1 \cdot t_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$ корни уравнения $t^2 + 5t + 3 = 0$ (по т. Виета) совпадут

$D = 13$

$t_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

т.к. $\sqrt{13} \approx 3{,}6$, то $t_{1,2} \approx \frac{-5 \pm 3{,}6}{2} \Rightarrow t_{1,2} < 0$

$\Downarrow$

Из мног-на $p(t)$ можно вывести множитель $f(t) = t^2 + 5t + 3$, а другой

Место для скобы

Шифр

множитель будет равен $g(t) = t^{n-2} - 3t^{n-4} + \dots + 1$

Ответ: да, можно представить $p(t)$ в виде произвед. многочленов положительной степени.

Ответ неверный

Нерасп. обосн.

$$\begin{array}{l|l} t^n + 5t^{n-1} + 3 & t^2+5t+3 \\ -\,t^n + 5t^{n-1} + 3t^{n-2} & t^{n-2} - 3t^{n-4} + \dots + 1 \\ \hline -3t^{n-2} + 3 & \\ -3t^{n-2} - 15t^{n-3} & \\ \hline 15t^{n-3} + \dots & \end{array}$$

Задание 1.

Пусть, второе выражение $x - \frac{1}{x} = t$, t - некое целое число

$x \neq 0 \Rightarrow x^2 - tx - 1 = 0$

$D = t^2 + 4 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2+4}}{2}$

Проверка: при $t = 2$: $\frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$1+\sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+2\sqrt{2}+2-1}{1+\sqrt{2}} = 2$

$1-\sqrt{2} - \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-2\sqrt{2}+2-1}{1-\sqrt{2}} = -2$

$\Rightarrow x_{1,2}$ ~~принимают~~ позволяют выражению $x - \frac{1}{x}$ принимать целые значения

Подставим $\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}$ в другие 2 выражения:

1) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} = \frac{1}{\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}} - \frac{1}{\left(\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}\right)^2 + 2021} = l$ (l - целое кубическое число)

$x_{1,2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2+4}}{2} > t$, минимальное значение $x_{1,2}$ будет получено при отрицательном $t \Rightarrow -\frac{2}{2} = -1$

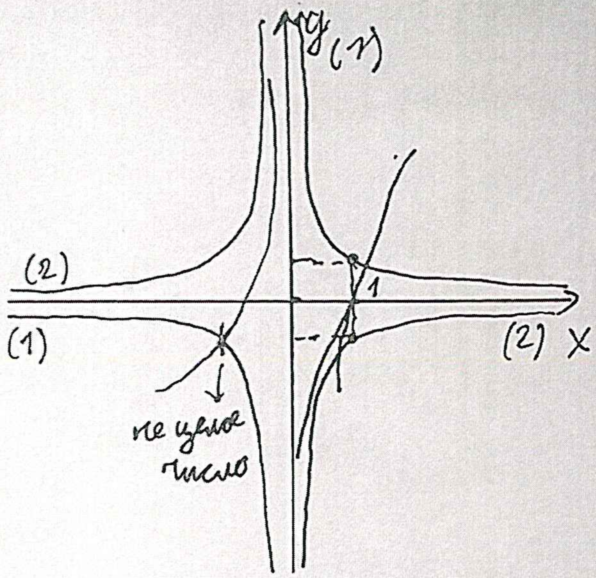
2) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$

Начертим график функции $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ (1)

см. далее

Место для скобы

Шифр



(2) $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

Т.к. (1) и (2) не достигают целых чисел в I и II четверти и ниже „1" они стремятся к „0" (ось OX-асинтота), то (больше → к∞)

Аналогично при отрицат. значениях y, достигаемых функцией.

(3) $x-\frac{1}{x}$

Заметим, что на графике они пересекаются при $x=1$.

Проверка:

(3): $1-\frac{1}{1}=0$ - целое

(2): $\frac{1}{2022}-1$ - нецелое число

(1): $\frac{1}{1}-\frac{1}{2022}$ - нецелое число

$\Downarrow$

Ответ: нет такого числа.

Задание 4.

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^{41}}\cdot x}\leq\frac{3}{2}-\frac{m}{x\cdot(x^2+\sqrt[3]{2020^{41}})}-\frac{\sqrt[3]{2020^{41}}\cdot x}{m+x^3}$$

$x>0$; $m>0$

Пусть, $\sqrt[3]{2020^{41}}\cdot x=k$, $k>0$

$$\frac{x^3}{m+k}+\frac{m}{x^3+k}+\frac{k}{m+x^3}\leq\frac{3}{2}$$

т.к. отношения и сумма положительных чисел всегда >0, то

Место для скобы

Шифр

$$\frac{1}{\frac{x^3}{m+k}+\frac{m}{x^3+k}+\frac{k}{m+x^3}} \geqslant \frac{2}{3} \Big| \cdot 3$$

$$\frac{3}{\frac{x^3}{m+k}+\frac{m}{x^3+k}+\frac{k}{m+x^3}} \geqslant 2$$

По неравенству о средних $\left(\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3}\right)$ получаем, что равенство будет достигнуто при $a=b=c$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{\frac{m+k}{x^3}+\frac{x^3+k}{m}+\frac{m+x^3}{k}}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{x^3}{m+k}+\frac{m}{x^3+k}+\frac{k}{m+x^3}} \geqslant 2$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{m+k}{x^3}+\frac{x^3+k}{m}+\frac{x^3+m}{k}\right)}$$

$$\frac{1}{3}\Big(\underbrace{\frac{m}{x^3}+\frac{x^3}{m}}_{\geqslant 2}+\underbrace{\frac{k}{x^3}+\frac{x^3}{k}}_{\geqslant 2}+\underbrace{\frac{k}{m}+\frac{m}{k}}_{\geqslant 2}\Big) \geqslant 2$$

Оценка в последнем выражении достигается при тех же условиях, что в исходном неравенстве

$$\begin{cases} x^3=m \\ m=k \\ x^3=k \end{cases} \Rightarrow x^3=\sqrt[3]{2020^4}\,x$$

Т.к. $x>0$

$$\Downarrow$$

$$x^2=\sqrt[3]{2020^4}$$

$$x=\sqrt[3]{2020^2} \Rightarrow m=2020^2$$

Ответ: $m=2020^2=4080400$