ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004558

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

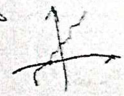
1.	Предмет	Орг. документы																
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл																
3.	Класс	11																
4.	Фамилия	Б	Е	Р	Н	А	Д	О										
	Имя	А	Л	И	Н	А												
	Отчество	В	А	Д	И	М	О	В	Н	А								
5.	Дата рождения	1	1		0	6		2	0	0	3							
		число			месяц			год										
6.	Страна	Россия																
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Новосибирская обл																
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город																
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	г. Новосибирск																
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	Лицей №22																

1	2	3	4	5	Σ
3	4	2	3	3	~~15~~
	+1				16

2. $\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\cdot\sin^3(2x)=$
$=\cos(2x)+\cos^5(2x)+2020\cos^3(4x)$.

1) Пусть $f(t)=t+t^5+2020t^3$
$f(t)\uparrow$, т.к. сумма $\uparrow$ ф-ий - это $\uparrow$ ф-ия.

2) $\sin(2x)=u$, $\cos(4x)=v$, тогда
$f(u)=f(v)$, а это возможно лишь тогда,
когда $u=v$, $f(t)$ пересекает ох 1 раз.



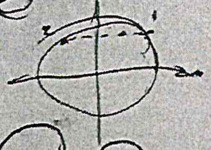
3) $\sin(2x)=\cos(4x)$;
$2\sin x\cos x=(\cos^2x-\sin^2x)^2$
$2\sin x\cos x=\cos^4x-2\cos^2x\sin^2x+\sin^4x \mid +4\cos^2x\sin^2x$?
по ОТТ: $\sin^2x+\cos^2x=1$,

$\Updownarrow$?

$\sin^2 2x+\sin 2x=(\cos^2x+\sin^2x)^2$
$\sin^2 2x+\sin 2x-1=0$.
$D=1+4=5$

$\sin 2x \in[-1;1]$

$\sin 2x=\left[\begin{array}{l}\frac{-1+\sqrt5}{2} \quad \sim 2{,}3 \\ \frac{-1-\sqrt5}{2} \quad \varnothing\end{array}\right.$



$\sin 2x=\frac{-1+\sqrt5}{2}$,

$x=\left[\begin{array}{l}\frac{\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)}{2}+\pi l \\ \frac{\pi-\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)}{2}+\pi k\end{array}\right.$

Ответ: $\frac{\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)}{2}+\pi l$,
$\frac{\pi-\arcsin\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}\right)}{2}+\pi k$.
$l,k\in\mathbb{Z}$ (целые)

004558

1. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$; x; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$.

Пусть $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{x^2+2021} = в$, тогда

$$\begin{cases} a - в = n; [n, m, k \in \mathbb{Z}] \\ \frac{1}{a} - a = m; \\ в - a = k; \end{cases}$$

а)

2) $\frac{1}{a} - a = \frac{-a^2+1}{a} = \frac{(1-a)(1+a)}{a}$; предположим, что a и $в$ - целые; тогда

3) $\frac{1}{x}$ - целое лишь при $x = \pm 1$, но $(a-в)$ и $(в-a)$ будут не целыми в этом случае.

* $\left(\frac{1}{x^2+2021}\right.$ всегда дробное$\left.\right)$ противоречие.

← почему? не обоснованно

б) пусть a и $в$ - дробные, тогда

1) если ~~если~~ (1) $a \in (-1; 1) \setminus \{0\}$, тогда

$1/a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ без целых чисел и аналогично (2) с $1/a \in (-1; 1)$

2) $в > 0$,

при этом $x \neq x^2 + 2021$ $(D < 0)$,

значит $a - в$ и $в - a$ не равны 0 $(a \neq в)$.

3) $x - x^{-1}$ не целое число. противоречие.

Ответ: нет

004558

3. $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3,\ n > 1,\ \in \mathbb{Z}$

1) Чтобы представить $p(t)$ в виде произведения многочленов положительной степени с ~~положительными~~ целыми коэффициентами нужно, чтобы $p(t)$ раскладывалось на множители в соответствии с корнями ур-ия $p(t) = 0$.

$$p'(t) = \frac{nt^n}{t} + \frac{5(n-1)t^n}{t^2}$$

$$p'(t) = 0.$$

$$\frac{nt^{n+1} + 5nt^n - 5t^n}{t^2 > 0} = 0$$

$t^n(nt + 5n - 5) = 0;$

$n > 1$, поэтому $5n - 5 > 0$

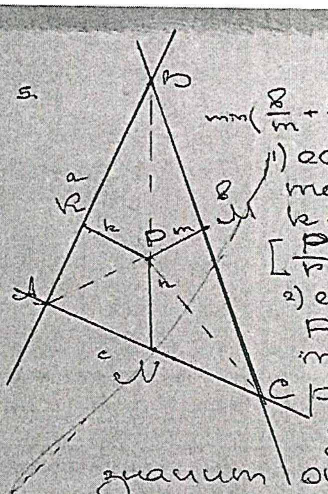
$t^n \neq 0;$

$\Downarrow$ $nt = -5n + 5$, при этом t - отрицательное

$t = -5 + \frac{5}{n}$, $p(t)$ можно представить только когда $n = 5$.

$t^5 + 5t^4 + 3 = p(t)$

5.



$\min\left(\frac{b}{m}+\frac{c}{n}+\frac{a}{k}\right)$ при P.?

1) если P – точка ∩ бис-с, тогда P – центр впис. окр. Δ

$k=m=n=r$

$\left[\frac{p\ (\text{периметр})_{\text{const}}}{r}\right]$

2) если P – точка ∩ высот, P – ортоцентр Δ, так как кратчайшее расстояние от точки до прямой – перпендикуляр, значит отношение ⊥ и ст. Δ: $\frac{\text{ст.}\Delta\ \text{const}}{\text{ст.}\perp(\max)\uparrow}$ max

3) чтобы сумма была минимальной нужно, чтобы m, n и k были максимальными (при a, b, c = const)

4) если K совпадёт с A, M с B и N с C, то $\frac{AC'\cdot BA'\cdot CB'}{C'B\cdot A'C\cdot B'A}=1$ соотношение 1:1.

5) если точки K, M, N лежат вне Δ на продолжении AB, BC, AC соответственно, то

k, m, n ↑, при a, b, c = const, тогда $\left(\frac{\text{ст.}\Delta\ \text{const}}{\text{ст.}\uparrow}\right)$ min

Ответ: ~~при~~ если точки K, M, N лежат на продолжении прямых (вне Δ), то сумма $\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ – min.

? $m>0$, чтобы сущ-ли $x>0$.

4. $\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}x} \leq 3/2 - \frac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}$

Пусть $x^3 = a\,(>0)$,
$m = b\,(>0)$,
$\sqrt[3]{2020^4}x = c\,(>0)$, тогда

S: $\underbrace{\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a}}_{S} \leq 3/2$; $S\in(0;3/2]$ сумма положительных чисел - положительное число

$\frac{a(a+c)(b+a)+b(b+c)(b+a)+c(c+b)(c+a)}{(a+b)(a+c)(b+c)} \leq 3/2 \,|\cdot(a+b)(b+c)(c+a)$ >0

$a^2b+acb+a^3+a^2c+b^3+b^2a+b^2c+abc+c^3+c^2a+c^2b+abc \leq$

$\leq \frac{3}{2}(abc+ac^2+b^2c+bc^2+a^2b+a^2c+ab^2+abc)\,|\cdot 2$;

$6abc+(a^2b+ab^2+bc^2+b^2c+ac^2+a^2c+a^3+b^3+c^3)2 \leq$

$\leq 6abc+(a^2b+ab^2+bc^2+b^2c+ac^2+a^2c)3$;

$2(a^3+b^3+c^3) \leq ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$;

$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ $\quad 2\sqrt{ab} \leq a+b$;
$4ab \leq a^2+2ab+b^2$;
$a^2-2ab+b^2 \geq 0$
$(a-b)^2 \geq 0$;

$p = \sqrt[3]{2020^4}x$, $x^3 = \frac{p^3}{2020^4}k$
>0

$\underbrace{\frac{p^3}{k(m+p)} + \frac{m}{\frac{p^3}{k}+p} + \frac{p}{m+\frac{p^3}{k}}}_{\in(0;3/2]} \leq 3/2$;

$\begin{cases} a \leq 3/2(b+c); \\ b \leq 3/2(a+c); \\ c \leq 3/2(a+b); \end{cases}$

$\Downarrow$

$a+b+c \leq 3/2(2a+2b+2c)$;
$a+b+c \leq \underbrace{3(a+b+c)}_{\in[1/3;\infty)}$

$x^3+x\sqrt[3]{2020^4}+m \in [1/3;\infty)$;
$x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})+m \geq 1/3$
>0

$m-1/3 \geq -x^3-x\sqrt[3]{2020^4}$
$m-1/3 \geq -x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})$
≥ 0 $\quad >0 \quad >0$
$m-1/3 \geq 0$
$m \geq 1/3$

$m\in[1/3;\infty)$.