Место для скобы

003740

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	Математика
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	БЕЛОВ
	Имя	РОМАН
	Отчество	ВИТАЛЬЕВИЧ
5.	Дата рождения	23 (Число) 07 (Месяц) 2003 (Год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Новосибирская область
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Новосибирск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ Гимназия №11 „Гармония"

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________________

Место для скобы

Шифр 003740

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	1.04.21	Кодряшова Е. Е.	[illegible]

№2

$\sin x + \sin^2 x + 2020 \sin^5 x = \cos 2x + \cos^3 2x + 2020 \cdot \cos^5 2x$

$2020(\cos^5 2x - \sin^5 x) + (\cos^3 2x - \sin^3 x) + \cos^2 x - \sin x = 0$

$\cos 2x = a \; ; \; \sin x = b$

$2020(a^5 - b^5) + (a^3 - b^3) + a - b = 0$

$2020(a-b)(a^4 + a^3 b + a^3 b^2 + ab^3 + b^4) + (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b) = 0$

$(a-b)\left(\underbrace{\frac{2020}{b^4}}_{>0}\underbrace{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1\right)}_{\text{первая скобка}}\right) +$

$+ \left(\underbrace{\frac{1}{b^2}}_{>0}\underbrace{\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1\right)}_{\text{вторая скобка}} + 1\right) = 0$

1	2	3	4	5	Σ
6	5	3	0	2	16

Т.к. в скобках однородные ? уравнения, вынесем b^4 и b^2 за скобки.

Т.к. $\frac{2020}{b^4} > 0$ и $\frac{1}{b^2} > 0$, надо доказать, что первая и вторая скобки > 0

~~1)~~ $\cancel{t}$ $\frac{a}{b} = t$

1) $t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 = 0$

$t^2 + t + 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = 0$

$t^2 + \frac{1}{t^2} + (1 + \frac{1}{t}) + 1 = 0$

$t + \frac{1}{t} = z$

$t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} = z^2$

$t^2 + \frac{1}{t^2} = z^2 - 2$

$z^2 - 2 + t + 1 = 0$

$z^2 + z - 1 = 0$

2) $t^2 + t + 1 = 0$

$D < 0$

Место для скобы

Шифр 003740

$D = \sqrt{5}$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$t^2 + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} t$

$t^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} t + 1 = 0$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 < 0$

$\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - 4 < 0$

$2\sqrt{5} + 6 - 16 < 0$

$2\sqrt{5} - 10 < 0$

$\sqrt{20} - \sqrt{100} < 0$

$\cancel{t^{+8}}$

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4 < 0$

$\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} - 4 < 0$

$6 - 2\sqrt{5} - 16 < 0$

Отсюда следует, что скобки > 0

$a - b = 0$

$\cos 2x - \sin x = 0$

$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\sin x = t$; $-1 \le t \le 1$

$D = 1 + 8 = 9$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$

$t_1 = -1$

$\sin x = -1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$

$k \in Z$

$t_2 = \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in Z$

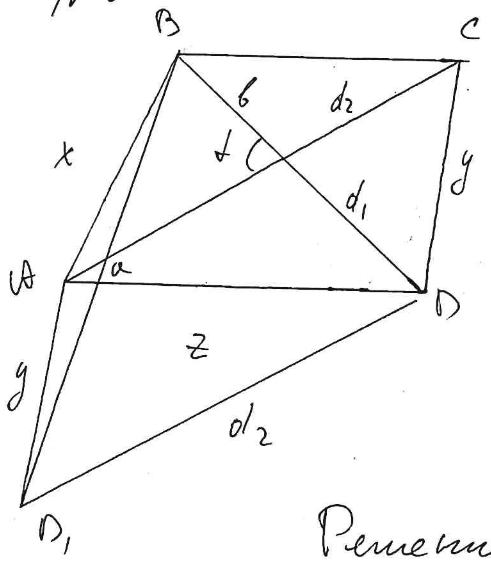
Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

$\pm$

Место для скобы

Шифр 003740

№5



Дано: $S_{ABCD} = 32$

$AB + CD + BD = 16$

$d_2 - ?$

Решение:

1) $AO = a$; $OB = b$; $AC = d_2$; $BD = d_1$

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha = 32$

$x + y + d_1 = 16 \Rightarrow x + y = 16 - d_1$

$\sin\alpha = \dfrac{32}{\frac{1}{2} d_1 d_2} = \dfrac{64}{d_1 d_2}$

$\begin{cases} a + b > x \\ d_2 - a + d_1 - b > y \end{cases}$

$d_1 + d_2 > x + y$

$d_1 + d_2 > 16 - d_1$

$d_2 > 16 - 2d_1 > 0$

$2d_1 < 16$

$d_1 < 8$

$0 < \sin\alpha \leq 1$

$0 < \dfrac{64}{d_1 d_2} \leq 1$

$d_1 d_2 \geq 64$

$d_2 > 8$

$d_2 < x + y + d_1$ $\left(\begin{matrix} BD_1 < x + y; \\ d_2 < BD_1 + d_1 \end{matrix}\right)$

$d_2 < 16$

$8 < d_2 < 16$

Ответ: $8 < d_2 < 16$

Место для скобы

Шифр

№1

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$, $x-\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

Пусть все три числа целые, тогда сумма этих чисел будет тоже целой.

Сложим их:

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}+x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}=$

$=$ целое число

$x-\frac{1}{x}=$ целое, может быть целым только при $x=1$ и $x=-1$, при любых других — нет, т.к. если x — целое, то $\frac{1}{x}$ — нет и наоборот.

$x=1$ и $x=-1$

$1-\frac{1}{2022}$ — не целое

$\frac{1}{2022}-1$ — не целое

Ответ: нет такого числа

$\pm$

Место для скобы

Шифр

№3 $x^n+5\cdot x^{n-1}+3 = A\cdot B$

Проверим частные случаи:

$n=2$

$x^2+5x+3=0$

$D=25-4\cdot 3=13$

$\sqrt{D}$ - иррациональное число, значит коэффициенты не целые

$n=3$

$x^3+5x^2+3=0$

Запишем уравнение для коэффициентов

$p_n = 1 = \sum a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_n b_0$

$p_{n-1} = 5 = \sum a_0 b_{n-1} + a_1 \cdot b_{n-2} + a_{n-1} b_0$

$\vdots$

$p_0 = 3 = a_0 b_0$

$\Downarrow$

$a_0=1$ и $b_0=3$

$a_0=3$ и $b_0=1$ (Для любого уравн.)

$A = a_0 + a_1 x^1 + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n x^n$

$B = b_0 + b_1 x^1 + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$

$a_0, a_1, \ldots a_n$

$b_0, b_1, \ldots b_n$ – целые числа

Для $n=3$

$p_3 = 1 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$

$p_2 = 5 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$

$p_1 = 0 = a_0 b_1 + a_1 b_0$

$p_0 = 3 = a_0 b_0$

Место для скобы

Шифр

$a_0 = 1 \quad b_0 = 3$

$b_1 + 3a_1 = 0$

$b_1 = -3a_1$

Т.к. 4, 5, 6 степени не сущ., запишем уравнение:

$p_4 = 0 = a_3 b_1 + a_2 b_2 + b_3 a_1$

$p_5 = 0 = a_3 \cdot b_2 + b_3 a_2$

$p_6 = 0 = a_3 \cdot b_3$

$b_2 - 3a_1^2 + 3a_2 = 5$

$b_2 - 5 = 3a_1^2 + 3a_2$

Т.к. правая часть делится на 3, то и левая должна.

b_2 даёт остаток 2 при делении на 3

$b_3 + a_1 b_2 - 3a_1 a_2 + 3a_3 = 1$

$a_3 = 0 \qquad b_3 = 0$

$b_3 \cdot a_2 = 0$

$a_2 = 0 \qquad b_3 = 0$

$b_3 \cdot a_1 = 0 \qquad a_2 \cdot b_2 = 0$

$a_1 = 0 \quad b_3 = 0 \quad b_2 = 0 \quad a_2 = 0$

Противоречит условию

X