ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

07001
Шифр

мет	МАТЕМАТИКА
ант	1
с	10
илия	БЕГУНОВИЧ
	АНАСТАСИЯ
ство	АНАТОЛЬЕВНА
рождения	26 (Число) 06 (Месяц) 2006 (Год)
на	РФ
он (пр: Томская обл., инградская область)	Красноярский край
униципального образования т, деревня, село, город)	город
енный пункт (пр: Томск, рово, Псков)	Ачинск
ое наименование овательного учреждения, ором Вы обучаетесь в е время	МАОУ "Школа №17"

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Бегунович

Шифр 07001

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16		Емельянова	Е

1	2	3	4	5	Σ
3	5	2	3	3	16

№1 $y^2(y-x+2)-y(x+4)+5x+7=0$

перед нами квадратное уравнение вида $ax^2+bx+c=0$,

где $a=y-x+2$; $b=-(x+4)$; $c=5x+7$

$D=b^2-4ac$

Если дискриминант $=0$, то уравнение имеет один корень

$(-4-x)^2-4\cdot(y-x+2)(5x+7)=0$

$x^2+8x+16-4(5xy+7y-5x^2-7x+10x+14)=x^2+8x+16-4(-5x^2+5xy+7y+3x+$

$+14)=\cancel{x^2+8x+16+20x^2}$ $21x^2-4x-40-20xy-28y=0$

$\cancel{21x^2-4x^2}$ $21x^2-4x-40=28y+20xy$

$21x^2-4x-40=y(28+20x)$

$y=\dfrac{21x^2-4x-40}{28+20x}$

Я заметила, что x должен быть отрицательный, так как если он положительный — числитель будет меньше знаменателя, целое число не получится.

Предлагаю решить методом подбора:

x	-1	-2
y	$\frac{15}{8}$	-5

сделаю проверку $-5=\dfrac{21\cdot(-2)^2-4\cdot(-2)-40}{28+20\cdot(-2)}=\dfrac{60}{-12}=-5$

$-5=-5$

Ответ: $(-2;-5)$
$(x;y)$

Шифр 07001

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

№2 $\cos 3x = A \cdot \sin 2x$

$\sin 3x = B \cdot \cos 4x$

$\sin 2x = 2\cos x \sin x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 3x = A \cdot 2\cos x \sin x$

$\sin 3x = B \cdot 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

выведу из первого уравнения, чему равно $\cos x$: $\cos x = \dfrac{\cos 3x}{2A\sin x}$

и подставлю во второе:

$$\sin 3x = B \cdot 2\left(\frac{\cos 3x}{2A\sin x}\right)^2 - \frac{2\sin^2 x}{1}$$

$$\sin 3x = B \cdot \frac{2\cos^2 3x}{4A^2\sin^2 x} - \frac{2\sin^2 x}{1} = B \cdot \frac{2-2\sin^2 3x}{4A^2\sin^2 x} - \frac{8A^2\sin^4 x}{4A^2\sin^2 x}$$

$$\frac{\sin 3x}{B} = \frac{2-2\sin^2 3x - 8A^2\sin^4 x}{4A^2\sin^2 x}$$

рациональное число не имеет корней, рассмотрим

получившееся уравнение:
- A и B — рациональные числа
- в правой части все синусы возведены в четную степень, поэтому даже если они содержат корни, то при возведении в степень они сокращаются.
- значит правая часть — это рациональное число, отсюда следует, что и левое

Значит $\sin 3x$ — рациональное число

Ч.Т.Д

Шифр 07001

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

№3 $\frac{a+b-c}{2c} + \frac{b+c-a}{2a} + \frac{a+c-b}{2b} \geq \frac{3}{2}$

приведу к общему знаменателю $2abc$

$$\frac{ab(a+b-c)+bc(b+c-a)+ac(a+c-b)}{2abc} \geq \frac{3}{2} \quad \Big|\cdot 2$$

$$\frac{ab(a+b-c)+bc(b+c-a)+ac(a+c-b)}{abc} \geq 3$$

$$a^2b+ab^2-abc+b^2c+bc^2-abc+a^2c+ac^2-abc \geq 3abc$$

$$a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2 \geq 6abc$$

Можно заметить, что каждый член выражения в левой части имеет переменную во второй степени, что говорит о том, что левая часть больше или равна правой ?

вывод неверен

Приведу несколько примеров.

Пусть $a>b>c$ и $a=5$, $b=3$, $c=2$, подставлю в данное в условии уравнение

получу $1\frac{2}{3} \geq \frac{2}{3}$ правильно

Пусть $a>c>b$ и $a=5$, $c=3$, $b=2$, подставлю в данное в условии уравнение

получу $2\frac{1}{6} \geq \frac{2}{3}$ правильно

При любых положительных числах, это неравенство выполняется

ч.т.д

Шифр 7001

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

№4

$x^2+px-\frac{1}{2p^2}$ - квадратное уравнение вида ax^2+bx+c,

пусть оно $=0$, тогда, чтобы оно имело ~~бы~~ 2 корня,

дискриминант должен быть >0

$$x^2+px-\frac{1}{2p^2}=0$$

$$D=p^2+\frac{4}{2p^2}>0$$

$$D=\frac{2p^4+4}{2p^2}>0$$

$$D=\frac{p^4+2}{p^2}$$

$$x_1=\frac{-p+\sqrt{\frac{p^4+2}{p^2}}}{2}=\frac{-p+\frac{p^2+\sqrt{2}}{p}}{2}=\frac{\frac{-p^2+p^2+\sqrt{2}}{p}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{p}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2p}$$

$$x_2=\frac{-p-\sqrt{\frac{p^4+2}{p^2}}}{2}=\frac{\frac{-p^2-p^2-\sqrt{2}}{p}}{2}=\frac{-2p^2-\sqrt{2}}{2p}$$

преобразовано неверно

$$x_1^4=\left(\frac{\sqrt{2}}{2p}\right)^4=\frac{4}{16p}=\frac{1}{4p}$$

$$x_2^4=\left(\frac{-2p^2-\sqrt{2}}{2p}\right)^4=\frac{4+48\sqrt{2}\cdot p^6+50p^4+16p^8}{16p^4}=$$

~~$1+12\sqrt{2}p^6+$~~

$$\frac{1}{4p}+\frac{4+48\sqrt{2}p^6+50p^4+16p^8}{16p^4}=\frac{4p+4+48\sqrt{2}p^6+50p^4+16p^8}{16p^4}$$

это число будет положительно, так как, все числа со знаком + и некоторые возведены в квадрат

$\Rightarrow x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$ ч.т.д.

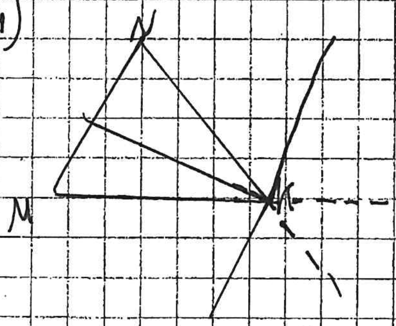
Шифр 7001

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

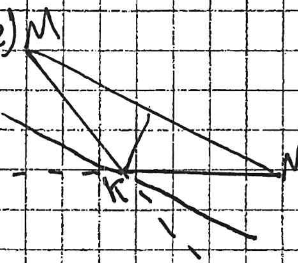
Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

№5 треугольник MNK может быть остроугольным, тупоугольным или прямоугольным, рассмотрим все случаи:

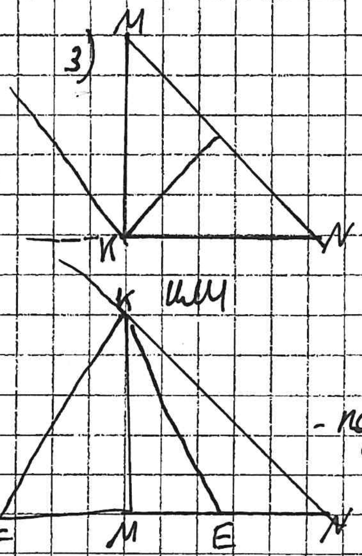
1)



2)



3)



- подходит

Рассмотрим ΔKFE: KE = ~~FK~~ FK - по условию

значит ΔKFE - равнобедренный

ΔKMN - прямоугольный

$MK^2+MN^2=KN^2$ - теорема пифагора

$MK^2+NK^2=4R^2$

$MK^2+NK^2=D^2$

$\angle FMK=90^\circ$ => лежит на диаметре

KF=KE

KE - биссектриса острого угла в прямоугольном Δ и равна $\sqrt{MK^2+NK^2}$

=> $MK^2+NK^2=KE^2$

=> KE или KF = D
(они равны)

ЧТД