ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

07562

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

…мет	Математика
…нт	1
	11
…ия	Басова
	Василиса
…во	Андреевна
…ждения	17 (Число) 08 (Месяц) 2005 (Год)
	Россия
…(пр: Томская обл., …градская область)	Тюменская область
…ципального образования …деревня, село, город)	город
…ный пункт (пр: Томск, …о, Псков)	Тюмень
…наименование …тельного учреждения, …м Вы обучаетесь в …ремя	Физико-математическая школа Тюменской области

…е на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail …льтатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____

Место для скобы

Шифр 07562

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20	26.03	Корякина Е.Е.	[signature]

1	2	3	4	5	Σ
5	4	4	7	0	20

Вариант 1

№1

$2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$

$2x^2+2x^2z^2+z^2+7(y-3)^2=30$

все слагаемые ≥ 0 и целые т.к квадраты, целое · целое = целое.

Заметим, что все решения $(x;z)$ будут решения $(-x;-z)$ $\Rightarrow$

Рассмотрим где $x \ge 0$

1 $x=0$ $z=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$ т.к $z^2 \le 30$; $30-z^2 \underset{7}{\equiv} 0$ $2-z^2 \underset{7}{\equiv} 0$

$2 \underset{7}{\equiv} z^2 \Rightarrow z=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

$z=3$ $(y-3)^2=3$ y – нецелое

$z=4$ $(y-3)^2=2$ y – нецелое

2. $x=1$ $z=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$ $28 ⋮ 7$; $7(y-3)^2 ⋮ 7 \Rightarrow 3z^2 ⋮ 7 \Rightarrow z^2 ⋮ 7 \Rightarrow$

$28=3z^2+7(y-3)^2$ т.к $3z^2 \le 28$ $z ⋮ 7 \Rightarrow z=0 \Rightarrow y=5;1$

3 $x=2$ $z=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ $9z^2 \not⋮ 7$ т.к $7(y-3)^2 ⋮ 7$, $22 \not⋮ 7$, если

$22=7(y-3)^2+9z^2$ $z=1$ $\frac{13}{7}=(y-3)^2 \Rightarrow y$ – нецелое

4 $x=3$ $z=0$, но $12 \not⋮ 7$.

$7(y-3)^2+19z^2=12$

5 $x \ge 4$ $2x^2 \ge 32 \Rightarrow 2x^2z^2+z^2+7(y-3)^2<0$ (невозможно).

Ответ: $(1;5;0)(1;1;0)(-1;5;0)(-1;1;0)$.

Место для скобы

Шифр 07562

№3

$$\frac{2a}{3(b+c)}+\frac{2b}{3(a+c)}+\frac{2c}{3(a+b)}\geq 1$$ (доказать)

$$\frac{a^2}{3(ba+ca)}+\frac{b^2}{3}\cdot\frac{1}{(ab+cb)}+\frac{c^2}{3}\cdot\frac{1}{(ac+bc)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\cdot\frac{2}{6}$$? ?

неравенство Коши для дробей

$(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ac)$ т.к.

$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+cb$ (по неравенству) $a, b, c>0$

$$\cancel{\frac{3(ab+bc+ac)}{ab+bc+ca}\cdot\frac{2}{6}}$$

$$\frac{2a}{3(b+c)}+\frac{2b}{3(a+c)}+\frac{2c}{3(a+b)}\geq\frac{6(ab+bc+ac)}{6(ab+bc+ca)}\quad 1\Rightarrow \text{ч.т.д.}$$

№4

~~4)~~ Применим теорему Виета для уравнения 3-х степеней

$x_1+x_2+x_3=1$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2x_3+x_1\cdot x_3+x_1x_2}{x_1\cdot x_2\cdot x_3}$$

$$x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_3+x_1\cdot x_2=\frac{b}{a}$$

$$x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\frac{b}{a}$$

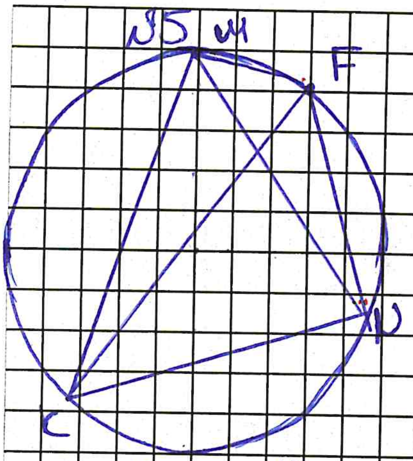
$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1\cdot\frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}}=-1\Rightarrow \text{ч.т.д.}$$

+

Место для скобы

Шифр 07562

№5



MNK - заданная окружность; O_1 - центр описан окружности

F - произвольная точка.

$FM^4 + FN^4 + FK^4$

$FN + MF = KF$?? ⇒

$FM^4 + FN^4 + FK^4 = 2MF^4 + 4MF^3 \cdot FN + 6MF^2 \cdot FN^2 + 4FN^3 \cdot MF + 2FN^4$

$MF + FN = const$ для окружн.

№2

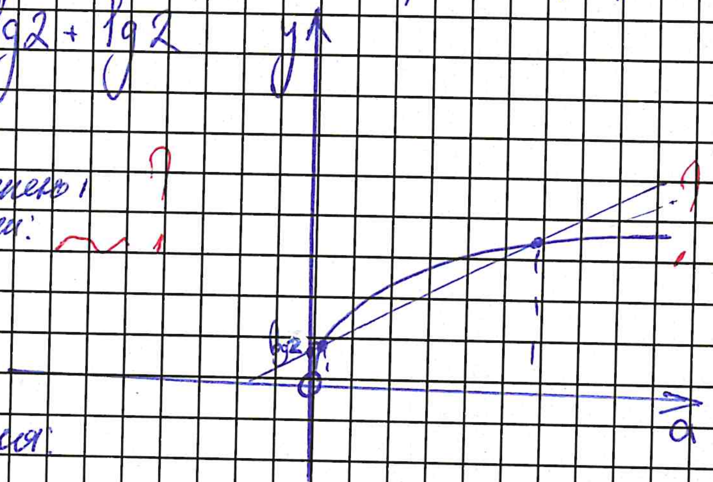
~~посчитаем~~ $x^2 > 2023$ т.к. $\lg(x^2-2023)$

пусть $x^2 - 2023 = a$ ⇒ $a > 0$

$2^{\lg a} = a^{\lg 2}$ (по с-ву логарифмов)

$a^{\lg 2} = \lg 2^{(a+1)} = (a+1)\lg 2 = a \cdot \lg 2 + \lg 2$

чертеж графика



Задаем функции:

$f(x) = a^{\lg 2}$ график функции - степень, график функции:

$f(x) = a \cdot \lg 2 + \lg 2$ - (прямая)

$\lg 2$ - константа

⇒ ~~Максимально~~ 2 решения.

$x^2 = a + 2023$ ⇒ 4 решения.

Ответ: 4 решения.