ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004507

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	БАРОЦКИЙ
	Имя	ГЛЕБ
	Отчество	АЛЕКСЕЕВИЧ
5.	Дата рождения	03 (число) 02 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Челябинская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Челябинск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ "ЛИЦЕЙ № 97 Г. ЧЕЛЯБИНСКА"

1	2	3	4	5	Σ
4	6	5	6	2	23

Место для скобы

Шифр 004507

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

№2

$\sin(2x) + \sin^5(2x) + 2020 \cdot \sin^9(2x) =$

$= \cos(4x) + \cos^5(4x) + 2020 \cdot \cos^9(4x)$

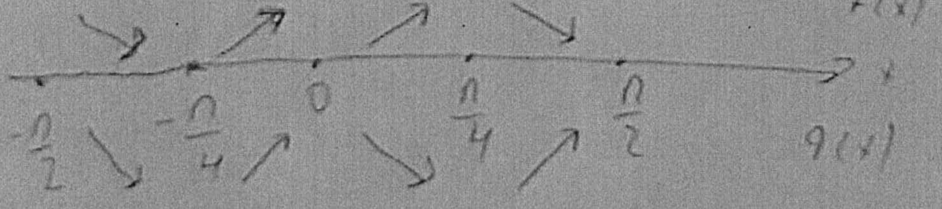
$f(x) = \sin(2x) + \sin^5(2x) + 2020 \sin^9(2x)$

$g(x) = \cos(4x) + \cos^5(4x) + 2020 \cos^9(4x)$

рассмотрим $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, найдем решения $f(x) = g(x)$, период $f(x) - \pi$, период $g(x) - \frac{\pi}{2}$,

Найдем промежутки возрастания и убывания $f(x)$ и $g(x)$

как? (где производная?)



Место для скобы

Шифр

$f(0)=0;\quad g(0)=2022>0;$

$f(\frac{\pi}{2})=0;\quad g(\frac{\pi}{2})=2022>0;$

$f(\frac{\pi}{4})=2022>g(\frac{\pi}{4})=-2022,$

получается, что уравнение

$f(x)=g(x)$ на $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$ имеет ~~давно~~ ровно 2 корня?

Заметим, что $f(\frac{\pi}{12})=g(\frac{\pi}{12})=0;$

$f(\frac{5\pi}{12})=g(\frac{5\pi}{12})=0;$ Значит,

$x=\frac{5\pi}{12}$ и $x=\frac{\pi}{2}$ - искомые корни,

осталось отыскать ~~корни~~ корни

$f(x)=g(x)$ на $x\in[-\frac{\pi}{2};0)$

$f'(x)=2\cos(2x)+10\sin^4(2x)\cos(2x)+$

$+2020\cdot2\cdot9\cdot\sin^9(2x)\cos(2x)$

$g'(x)=4\sin(4x)+2020\cos^4(2x)\sin(4x)+$

$+2020\cdot4\cdot9\sin(4x)\cdot\cos^8(4x)$

Место для скобы

Шифр 004507

$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x) = \cos 2x(2+10\sin^4(2x)+2020\cdot 18\cdot\sin^8(2x))-$
$-4\cos(2x)\sin(2x)(2+10\cos^4(4x)+2020\cdot 18\cos^8(4x)) = \cos(2x)$
$(2+10\sin^4(2x)+2020\cdot 18\sin^8(2x)-$
$-4\sin(2x)(2+10\cos^4(4x)$ ~~+2020·18cos8~~
$+2020\cdot 18\cos^8(4x)))$

$f(x)=g(x)$ имеет корни, когда $(f(x)-g(x))'=0$, на промежутке $x\in[-\frac{\pi}{2},0)$
$(f(x)-g(x))'=0$, когда $\cos(2x)=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$, и
$2+10\sin^4(2x)+2020\cdot 18\sin^8(2x)-4\sin(2x)$
$(2+10\cos^4(4x)+2020\cdot 18\cos^8(4x))<0$

Таким образом, $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z \\ x=\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in Z \\ x=\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in Z \end{array}\right.$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; $x=\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in Z$;
$x=\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in Z$;

Место для скобы

Шифр

№4

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} -$$

$$- \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}$$

~~1) пусть~~ $\cancel{x^3 = b, \quad c = \sqrt[3]{2020^4}\cdot x}$

1) пусть $b = x^3, \quad c = \sqrt[3]{2020^4}\cdot x$

$$\frac{b}{m+c} + \frac{c}{m+b} + \frac{m}{b+c} \le \frac{3}{2}$$

2) пусть $t = m+c, \quad n = m+b, \quad k = c+b,$

$$\frac{-t+n+k}{2t} + \frac{t-n+k}{2n} + \frac{n+t-k}{2k} \le \frac{3}{2}$$

$$\frac{-t+n+k}{t} + \frac{t-n+k}{n} + \frac{t+n-k}{k} \le 3$$

$\frac{n}{t}+\frac{t}{n}+\frac{k}{t}+\frac{t}{k}+\frac{k}{n}+\frac{t}{k}\le 6$

?

3) Лемма: если $m>0$, $b>0$, то $\frac{m}{b}+\frac{b}{m}\ge 2$ (равенство выполняется при $m=b$), получаем, что

$6\le\frac{n}{t}+\frac{t}{n}+\frac{k}{t}+\frac{t}{k}+\frac{k}{n}+\frac{n}{k}\le 6$

$\frac{n}{t}+\frac{t}{n}+\frac{k}{t}+\frac{t}{k}+\frac{k}{n}+\frac{n}{k}=6$, $t>0$, $k>0$, $n>0$, т.к. $m>0$, $b>0$, $c>0$, т.к. $x>0$,

~~возможно при $b=c=m$, $m=x^3=$~~

= Это возможно при $t=n=k$, тогда $b=c=m$, $m=x^3=\frac{\sqrt[3]{2020^4}}{x}$, $x\ne 0$, то $x=\sqrt[3]{2020^2}$,

$m=\sqrt[3]{2020^4}\cdot\sqrt[3]{2020^2}=2020^2$.

Т.е. при $m=2020^2$ неравенство имеет решения $x=\sqrt[3]{2020^2}$, при других m решений $x>0$ нет

ответ: $m=2020^2$

Место для скобы

Шифр

Шифр

№3

$P(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$, n - целое

Предположим, что это возможно раз можно разложить, то корни у $F(x) = 0$ есть - т. Безу должно быть хоть одно решение $t^n + 5t^{n-1} + 3 = 0$, т.к. коэф. целые, то корень является делителем свободного члена (3); $3: \pm 1, \pm 3$;

$t = \pm 1$, $t = \pm 3$; 1) $t = 1$, то $5 + 1 + 3 = 0$ - неверно

2) $t = -1$, $(-1)^n + 5(-1)^{n-1} + 3 = \pm 1 \pm 5 + 3 = 0$ неверно

$5 > 3 + 1 = 4$

3) $t = -3$; $(-3)^n + 5(-3)^{n-1} + 3 = (-3)^n + \frac{5}{-3}(-3)^n + 3 = 3 - \frac{2}{3} \cdot 3^n = 0$;

$3^n = \frac{9}{2} = 4{,}5$, не подходит

Шифр

т.к. $n \in \mathbb{Z}$, а 4,5 не являются степенью 3-ки,

4) $t = 3$; $(3)^n + 5(3)^{n-1} + 3 = 0$

$3^n + \frac{5}{3} \cdot 3^n + 3 = 0$; $\frac{8}{3} \cdot (3)^n = -3$;

$3^n = -\frac{9}{8}$; $3^n > 0 > -\frac{9}{8}$ – нет решений для n

ответ: нет, невозможно

№1

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$, $x - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$

либо $|x| < 1$, либо $|\frac{1}{x}| < 1$

1) пусть $x > 0$ $\begin{cases} x = \frac{1}{x^2+2021} \\ \frac{1}{x} = a + \frac{1}{x^2+2021} \end{cases}$ (1)

$a > 0$

или $\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+2021} - \varnothing \\ x = a + \frac{1}{x^2+2021} \end{cases}$

Шифр

(1) $x = \frac{1}{y^2+2021} \Rightarrow \frac{1}{y} = y^2+2021$

$-x^2+2021 = a + \frac{1}{y^2+2021}$, $a \in R$

$0 < x^2 < 1$, $\cancel{\frac{1}{0<x^2}}$

$0 < \frac{1}{y^2+2021} < 1$, $a = 2021 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{y^2+2021} = x - \varnothing$

2) пусть $x<0$, $\frac{1}{y^2+2021} = t$,

$\begin{cases} -x + \frac{1}{y^2+2021} = 1 \\ \frac{1}{x} = a + \frac{1}{y^2+2021} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2+2021} = 1 \\ y = a + \frac{1}{2021+x^2} \end{cases}$

$a<0$, $a \in R$

$-x+t=1$, $x = t-1$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{t-1}$, $\frac{1}{-x} + t = 1$,

$\frac{1}{y} = t-1$, $\frac{1}{t-1} = a+t$ $\quad 0<t<\frac{1}{2021}$,

$\frac{1}{t-1} = a+t$, то $-2 < \frac{1}{t-1} < -1 \Rightarrow a = -2$,

$t(t-1) - 2(t-1) = 1$; $t^2 - t - 2t + 1 = 0$,

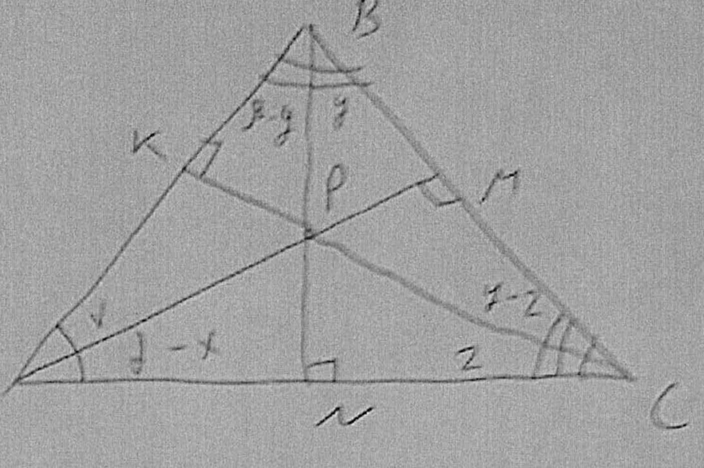
$t^2 - 3t + 1 = 0$ $\quad D = 9-4 = 5$; $t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > \frac{1}{2021} \Rightarrow$

нет, не существует $\quad$ ответ: нет, не существует

Место для скобы

Шифр

№5



γ, β, α — углы $\triangle ABC$,

$$\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK} = \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg}(\gamma - z) + \operatorname{ctg}(\alpha - x) + \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg}(\beta - y) + \operatorname{ctg} x = A$$

~~ctg a~~ $\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg}(b-a)$, a — переменная, найдем минимум $\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg}(b-a) = \dfrac{\sin b}{\sin(b-a)\sin a}$,

~~найдем найдем максимум sin a sin a~~

найдем максимум $\sin a \sin(b-a) = f(a)$,

$f'(a) = \cos x \sin(b-a) - \sin(y-x) - \sin(b-2a) = 0$, $b = 2a$, $\Rightarrow$ P — центр впис.

ответ: центр впис окр.

вывод не обоснован