Место для скобы

03726

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	10
4.	Фамилия	АПАРИН
	Имя	АНДРЕЙ
	Отчество	ЕВГЕНЬЕВИЧ
5.	Дата рождения	Число: 17; Месяц: 07; Год: 2005
6.	Страна	РОССИЯ
7.	Регион *(пр: Томская обл., Калининградская область)*	Кемеровская обл.
8.	Вид муниципального образования *(пр: пгт, деревня, село, город)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Новокузнецк
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время	МБОУ „Лицей № 35 имени Анны Ивановны Гермингер"

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись [подпись]

Шифр 03726

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
24		Емельянова	Ем

1	2	3	4	5	Σ
3	7	7	3	4	24

№4 Преобразуем неравенство, и если после преобразований получится неравенство, верное для любых значений переменных, что изначальное неравенство ~~было~~ тоже выполнялось для любых:

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by+cx)^2-(cz-ay)^2\geq 0,$

$a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2\geq(ax+bz)^2+(by+cx)^2+(cz-ay)^2$

$(ax)^2+(ay)^2+(az)^2+(bx)^2+(by)^2+(bz)^2+(cx)^2+(cy)^2+(cz)^2\geq(ax)^2+(bz)^2+2abxz+(by)^2+(cx)^2+2bycx+$

$+(cz)^2+(ay)^2-2acyz$; В обеих частях есть равные слагаемые.

Перенеся эти слагаемые в одну часть в сумме получится ноль, поэтому неравенство можно переписать в виде:

$(az)^2+(bx)^2+(cy)^2\geq 2abxz+2bycx-2acyz;$

Сгруппировав и перенеся всё в одну часть, получаем:

$(az)^2+(bx)^2-2az\,bx+(cy)^2-2bx\cdot cy+2acyz\geq 0;$

~~$(az-bx)^2+cy(cy-2bx+2az)\geq 0$~~

$(az-bx)^2+(cy)^2+cy\cdot 2(az-bx)\geq 0$

~~$(az-bx)($~~ Это квадрат суммы $(az-bx)$ и cy.

$(az-bx+cy)^2\geq 0$. Сумма и произведение любых действительных чисел есть число действительное. Квадрат любого действительного числа есть число неотрицательное.

Получили неравенство, верное для любых a,b,c,x,y,z, следовательно, первоначальное неравенство выполнялось для этих же чисел, что и требовалось доказать

№2. Условие: $p(x)=(a+1)x^2-(a+1)x+2022$; $\forall x\in[0,1]$: $p(x)\in[-2022,2022]$

Чему равно наибольшее значение a?

Решение:

• при $a=-1$: $p(x)=(-1+1)x^2-(1-1)x+2022=2022$;

в таком случае $\forall x\in\mathbb{R}$: $px=2022\in[-2022,+2022]$ - ~~условие~~ в частности это верно для $x\in[0,1]$, т.е. условие выполняется

Поскольку уже было верно для $a=-1$ и необходимо найти наибольшее a, нет смысла рассматривать $a<-1$

• при $a>-1 \to a+1>0$:

$p(x)$ – квадратный трёхчлен, график его – парабола ветвями направленными вверх, т.к. коэффициент при x^2 больше нуля.

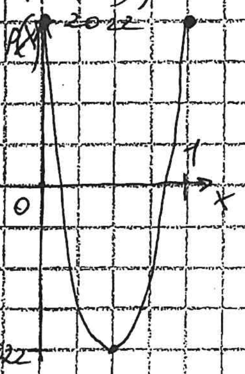
Координаты вершины этой параболы: $x_0 = \frac{(a+1)}{2\cdot(a+1)} = \frac{1}{2}$;

$p_0 = \frac{1}{4}(a+1) - \frac{1}{2}(a+1) + 2022 = -\frac{1}{4}(a+1) + 2022$;

Также можно заметить: $p(0) = 0^2\cdot(a+1) - 0\cdot(a+1) + 2022 = 2022$,
$p(1) = 1^2\cdot(a+1) - 1\cdot(a+1) + 2022 = 2022$

Т.е. для $a>-1$ $p(0)=p(1)=2022$;

Предельный случай, когда координаты вершины $(x_0, p(x_0))$ принимают вид $\left(\frac{1}{2}, -2022\right)$; тогда условие выполняется и a принимает максимальное значение:



$\cancel{p\left(\frac{1}{2}\right) = -2022}$, $p_0 = -2022$,

$-\frac{1}{4}(a+1) + 2022 = -2022 \Rightarrow -\frac{1}{4}(a+1) = -4044 \mid \cdot(-4)$

$(a+1) = 16176 \Rightarrow a = 16175$

Ответ: $a = 16175$

№3

Пусть $f(x) = x^3 - 2022x + 1011$, тогда по условию $f(a)=0$, $f(b)=0$

Это значит, что ~~трёхчлен~~ a, b, c – корни трёхчлена и $f(c)=0$, $a\neq b\neq c\neq a$

$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$;

Преобразуем: $(x-a)(x-b)(x-c) = (x^2 - ax - bx + ab)(x-c) = (x^2 - (a+b)x + ab)(x-c) =$
$= x^3 - (a+b)x^2 + abx - cx^2 + (a+b)\cdot cx - abc = x^3 + x^2(-a-b-c) + x(ab+ac+bc) - abc = f(x)$

С другой стороны $f(x) = x^3 + 0x^2 - 2022x + 1011$; следовательно, коэффициенты при соответствующих степенях x^n равны:

$$\begin{cases} -a-b-c=0 \\ ab+bc+ca=-2022 \\ -abc=1011 \end{cases}; \Rightarrow \cancel{\begin{cases} b+c=-a \\ bc+a(\dots)+cb=-2022 \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} abc=-1011 \\ ab+bc+ca=-2022 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

Необходимо найти значение выражения. Преобразуем его:

МЕСТО скобы

Шифр 03726

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc}{abc}+\frac{ac}{abc}+\frac{ab}{abc}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$$

Из системы ясно, что числитель равен -2022, а знаменатель: -1011;

$$=\frac{-2022}{-1011}=\frac{2\cdot 1011}{1011}=2$$

Ответ: 2

№1 при $n=1$: $1=1^2$

при $n=3$: $1+2+6=9=3^2$;

Сумма $\sum_{i=1}^{n} i!$ является точным квадратом, если её можно записать в виде: $1+3+5+\ldots+(2m-1)$, $m\in\mathbb{N}$

№5

В частном случае когда ML - диаметр $\triangle MNL=\triangle MKL$ по гипотенузе и острому углу (треугольники прямоугольные т.к. одна из сторон - диаметр описанной окружности), по теореме Пифагора $MK=MN=\sqrt{ML^2-NL^2}=\sqrt{(2r)^2-(\sin 30^\circ\cdot 2r)^2}=\sqrt{4r^2-r^2}=r\sqrt{3}$, где r - радиус окружности;

~~В таком~~ Площадь этих треугольников равна $\frac{1}{2}r\cdot\sqrt{3}r$

Суммарная площадь этих треугольников составляет площадь $MNLK$, т.е.: $2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot r^2=25 \Rightarrow r=\sqrt{\frac{25}{\sqrt{3}}}=5\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$MN+MK=2\cdot r\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}}=10\sqrt{\frac{3}{3}\sqrt{3}}=10\sqrt[4]{3}$