ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004490

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	АНШУКОВ
	Имя	САВЕЛИЙ
	Отчество	ВЛАДИМИРОВИЧ
5.	Дата рождения	01 (число) 12 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ивановская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Иваново
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ Лицей №6

3\. **Задача 1**/ Предп., что $\exists$ такое x, что $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} \in \mathbb{Z} \ (\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}) \\ x - \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

004480

1\) Если $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x} \in [-1; 1] / 0$, $-\frac{1}{x^2+2021} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} \in (-1; 1)/_0$ – прот.-е. (Прот-я вытекают из того, что в пром.-ке $(-1;0) \cup (0;1)$ нет $\mathbb{Z}$ чисел)

2\) Если $x \in (-1; 1)/_0$, то $\frac{1}{x} \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $\frac{1}{x^2+2021} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2+2021} < 0$

Оба числа $\in \mathbb{Z} \Rightarrow$ их Σ тоже $\Rightarrow x - \frac{1}{x^2+2021} \in \mathbb{Z}$, но $x \in (-1;1)/0$, $-\frac{1}{x^2+2021} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - \frac{1}{x^2+2021} \in (-1; 1)/0$ – прот.-е.

Ответ: нет, не существует.

Недост. обосн. 5б

1	2	3	4	5
5	3	4	7	1

Итого 20б

Задача 21 $\sin 2x + \sin^5 2x + 2020\sin^9 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020\cos^9 4x$. Преобр. 004480

$(\sin 2x - \cos 4x) + (\sin 2x - \cos 4x)(\sin^4 2x + \sin^3 2x \cdot \cos 4x + \sin^2 2x \cdot \cos^2 4x + \sin 2x \cdot \cos^3 4x + \cos^4 4x) +$

$+ 2020(\sin 2x - \cos 4x)(\sin^8 2x + \sin^7 2x \cdot \cos 4x + \ldots + \sin 2x \cdot \cos^7 4x + \cos^8 2x) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = \cos 4x \\ 1 + \underbrace{(\sin^4 2x + \sin^3 2x \cos 4x + \ldots + \sin 2x \cdot \cos^3 4x + \cos^4 2x)}_{>0\,?} + 2020\underbrace{(\sin^8 2x + \ldots + \cos^8 2x)}_{>0} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \cos 4x$; $\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$; $2\sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0$ $D = 1 + 8 = 9$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \\ \sin 2x = \frac{1+3}{4} = 1 \end{array}\right. \quad \left\{ \left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right. , n \in \mathbb{Z} \quad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + \pi n \\ x = -\frac{5\pi}{12} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right. , n \in \mathbb{Z} \right.$$

Неверные значения

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + \pi n$; $-\frac{5\pi}{12} + \pi n$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Ответ неверный

Недост. обоснования

3б

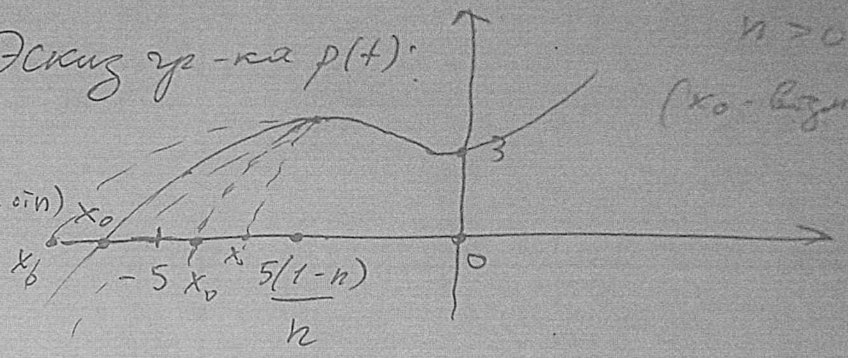
004480

Задача 3 | $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3 \Rightarrow p'(t) = (\cancel{n-1})^{n} \cdot t^{n-1} + 5(n-1)\, t^{n-2} = t^{n-2}\left(t(\cancel{n-1})^{n} + 5(n-1)\right)$

$p'(t) = t^{n-2}(tn + 5(n-1)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \ (\text{т.к. } n \geq 2) \\ t = -\frac{5(n-1)}{n} = \frac{5(1-n)}{n} \end{array}\right.$ $\quad t = \frac{5(1-n)}{\cancel{n}} < 0$, т.к. $1-n < 1-2 = -1$, $n > 0$

Тогда $\frac{5(1-n)}{n} = 5\left(\frac{1}{n} - 1\right) \in (-5; 0]$. Эскиз гр-ка $p(t)$:

(x_0 - возм. корень)



Видно, что у ур-я $p(t) = 0$ ровно действ. 1 корень (разный в з. от n) x_0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow t^n + 5t^{n-1} + 3 = (t - x_0)(t^{n-1} + \alpha_2 t^{n-2} + \alpha_3 \cdot t^{n-3} + \ldots + \alpha_n)$, причем $\begin{cases} (1 - x_0)(\sum \alpha_i + 1) = 9 \\ \alpha_n \cdot x_0 = -3 \ (1) \end{cases}$

(если разложить можно, конечно).

Из (1) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 > 0 \Rightarrow \text{нет (из гр-ка)} \\ x_0 = -1 \Rightarrow (-1)^n + 5 \cdot (-1)^{n-1} + 3 = 0, \text{ что не верно ни при } n \vdots 2, \text{ ни при } n \not\vdots 2. \\ x_0 = 3 > 0 \Rightarrow \text{нет (из гр-ка)} \\ x_0 = -3 \Rightarrow (-3)^n + 5 \cdot (-3)^{n-1} + 3 = 0, \end{array}\right.$ ~~n: 2 ...~~

чего быть не может, т.к. тогда сумма нечет. чисел равна четному

4б

Ответ. нет, невозможно.

Недост. обосн.

Задача 4/ Если сущ-т $x>0$ - реш-я нер-ва, то рассм его для них:

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \leq \frac{3}{2} - \frac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}$$

Пусть $\sqrt[3]{2020^4} = t$

$$\frac{x^3}{m+tx} + \frac{m}{x^3+xt} + \frac{xt}{x^3+m} \leq \frac{3}{2}$$

Замена: $x^3 = a$, $m = b$, $xt = c$.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2}.$$

Замена: $b+c = \alpha > 0$, $a+c = \beta > 0$, $a+b = \gamma > 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} \\ b = \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} \\ c = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha+\gamma-\beta}{\beta} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\gamma} \leq \frac{3}{2}$$

Им: $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} - 1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} - 1 + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} - 1 \leq 3 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right) \leq 6.$

Заметим, что $\alpha, \beta, \gamma > 0 \Rightarrow$, по нер-ву о средних: $\begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \\ \frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha} \geq 2 \\ \frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta} \geq 2 \end{cases} \Rightarrow$

7б

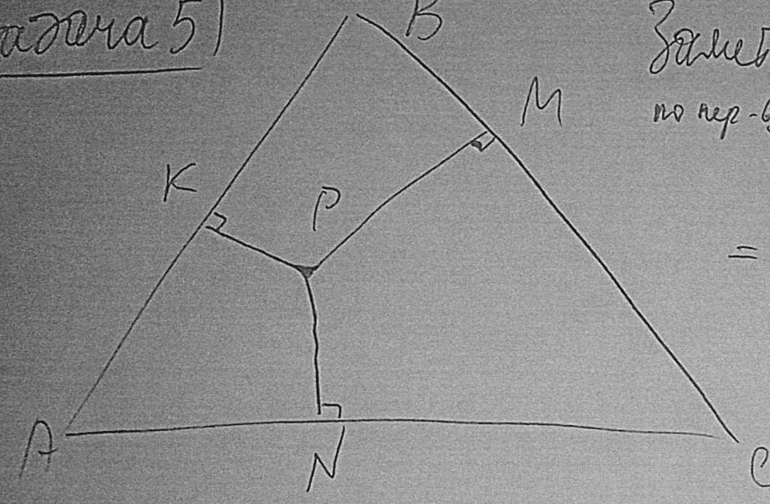
$\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right) + \left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}\right) + \left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right) \geq 6$, что дост-ся при $\alpha=\beta=\gamma$,

а по усл. у нас $\leq 6 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow \begin{cases} b+c = a+c \\ b+c = a+b \\ a+c = a+b \end{cases} \Rightarrow a = b = c \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = m \\ xt = m \end{cases} \begin{cases} x^3 = m \\ x\sqrt[3]{2020^4} = m \end{cases}$

$\begin{cases} x^3 = m \\ x^3\cdot 2020^4 = m^3 \end{cases} \Rightarrow m\cdot 2020^4 = m^3 \Rightarrow m^2 = 2020^4 \Rightarrow m = \pm 2020^2$. По усл. $m > 0 \Rightarrow m = 2020^2$

Ответ: $m = 2020^2$.

Задача 51



Заметим, что $\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK} \geq 3\sqrt[3]{\frac{AB\cdot AC\cdot BC}{PM\cdot PN\cdot PK}} = 3\sqrt[3]{\frac{4R_{ABC}\cdot S_{ABC}}{4R_{KNM}\cdot S_{KNM}}} =$
по нер-ву о ср-х

$= 3\sqrt[3]{\frac{R_{ABC}\cdot S_{ABC}}{R_{KNM}\cdot S_{KNM}}}$. Площадь и радиус опис окр MNK не могут превышать площади и радиуса ABC, т.е. min дост-ся, когда P совп-т с A, B или C.

$\frac{3}{2}$

Ф 5

m

20^2