Место для скобы

03781

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	10
4.	Фамилия	АЛЛЕНОВА
	Имя	СОФИЯ
	Отчество	СЕРГЕЕВНА
5.	Дата рождения	Число: 16; Месяц: 06; Год: 2005
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Калининградская область)*	Санкт-Петербург
8.	Вид муниципального образования *(пр: пгт, деревня, село, город)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Санкт-Петербург, Петергоф
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время	Федеральное государственное бюджетное общеобразовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский Государственный Университет»

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________

Место для скобы

Шифр 03781

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
17		Емельянова	[signature]

1	2	3	4	5	Σ
6	3	1	4	3	17

№1.

При каких n $1!+2!+\dots+n!$ - точный квадрат?

$n_{min} = \cancel{3}\ 1 \Rightarrow$ след. $n=3$

$1!+2!+3! = 9 = 3^2$

Рассм. дальше $4! = 24 \Rightarrow 1!+2!+3!+4! = 33$ почему?

Начиная с 5 - посл. цифра в значении факториала - 0 $\Rightarrow$ сумма факториалов будет постоянно оканчиваться на 3, начиная с $n=4$ $\Rightarrow$ $n=\{3,1\}$ единственные удовлетворяющее условию n, т.к факториал считают только для натур. чисел, и так как нет натур. числа дающего в квадрате посл. цифру равную 3 (3-простое число)

Ответ: $n=3$; $n=1$

№2

$$p(x) = (a+1)x^2 - (a+1)x + 2022$$

$$-2022 \le p(x) \le 2022 \qquad x \in [0;1]$$

$$-4044 \le (a+1)x^2 - (a+1)x \le 0$$

При $x=0$ и $x=1$ подходит $\forall a$, т.к. указ. разность в любом случае будет 0. Рассмотрим нецелые x:

$-4044 \le (a+1)(x^2-x) \le 0$, обозначим $a+1$ за y ($y=a+1$)

Место для скобы

Шифр 03781

$-4044 \le y(x^2-x) \le 0$

① Пусть $x=0{,}5$: $-4044 \le y_1(-0{,}25) \le 0$

y_{max} достиг. при минимальном значении (т.е -4044)

$$y_1 = \frac{-4044}{-0{,}25} = 16176$$

② Пусть $x=0{,}1$ $\quad -4044 \le (x^2-x)\,y_2 \le 0$

$$y_2 = \frac{-4044}{-0{,}99} = 4003{,}56$$

y_1 не удовл. усл при $x=0{,}1$

③ Пусть $x=0{,}01$ $\quad -4044 \le y_3(-0{,}0099) \le 0$

$$y_3 = 40{,}0356$$

④ Пусть $x=0{,}7$ $\quad -4044 \le y_4(-0{,}11) \le 0$

$$y_4 = \frac{-4044}{-0{,}11} = 444{,}84$$

Среди найд. y максимал. и удовл всем усл $= 4003{,}56$. Отсюда $a = 4002{,}56$

При других x из отрезка большего a не будет

Ответ: $a = 4002{,}56$

Место для скобы

Шифр 03781

№4

Д-ть, что $\forall\ a, b, c, x, y, z$ нер-во:

$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+bz)^2-(by+cx)^2-(cz+ay)^2 \overset{?}{\geq} 0$

$\Leftrightarrow a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2-$

$-a^2x^2-2axbz-b^2z^2-b^2y^2-2bycx-c^2x^2-c^2z^2+2czay-a^2y^2 \overset{?}{\geq} 0$

$\Leftrightarrow$

$a^2z^2+b^2x^2+c^2y^2-2axbz+2aycz-2bycx \overset{?}{\geq} 0 \Leftrightarrow$

$(bx-cy)^2+a^2z^2-2azxb+2aycz \overset{?}{\geq} 0 \Leftrightarrow$

$(bx-cy)^2+(az-xb)^2-x^2b^2+(cz+ay)^2-c^2z^2-a^2y^2 \overset{?}{\geq} 0$

① $(bx-cy)^2 \geq 0$

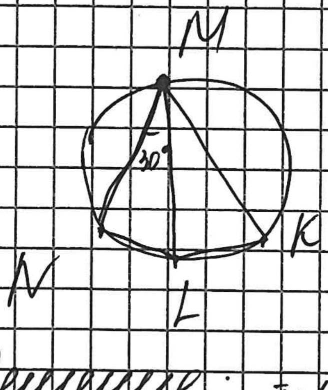
② $(az-xb)^2 \overset{?}{>} x^2b^2 \Leftrightarrow az^2-2azxb+x^2b^2 > x^2b^2$ - оч-но

③ $(cz+ay)^2 > c^2z^2+a^2y^2 \Leftrightarrow 2aycz > 0$ - оч-но $\Rightarrow$

$(bx-cy)^2+(az-xb)^2-x^2b^2+(cz+ay)^2-c^2z^2-a^2y^2 \geq 0$

доказано.

№5



Дано: ML - бис-са

$\angle LMN = 30°$

$S_{MNLK} = 25$

$MN + MK$ - ?

Решение: т.к. ML бис-са, то $\angle NMK = 2 \cdot \angle LMN = 60° \Rightarrow$ $\smile NLK = 120° \rightarrow \smile NMK = 240°$. Отсюда $\angle NLK = 120° \Rightarrow$ $\angle MNL + \angle MKL = 180°$, $\angle N = \angle K = 90° \Rightarrow ML$ - диаметр.

Место для скобы

Шифр 03781

$\Rightarrow$ т.к. у $\triangle MNL$ и $\triangle MKL$ ML - общая, $\angle MNL = \angle MKL$, $\angle NML = \angle KML$, то $\triangle MNL = \triangle MKL \Rightarrow$ их площади равны $\Rightarrow S_{MNL} = S_{MKL} = \frac{1}{2} S_{MNLK} = 12,5 = MN \cdot NL = MK \cdot KL$

$tg 30^\circ = \frac{NL}{NM} \Rightarrow NL = NM \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad MN + MK = 2MN$

$12,5 = MN^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

$MN^2 = \frac{37,5}{\sqrt{3}} \Rightarrow MN = \sqrt{\frac{37,5\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$

$MN + MK = 2\sqrt{\frac{37,5\sqrt{3}}{3}}$

Ответ: $MN + MK = 2\sqrt{\frac{37,5\sqrt{3}}{3}}$

№3

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ - ?

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt[3]{2022a - 1011}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2022b - 1011}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2022c - 1011}} =$

$= \frac{\sqrt[3]{(2022a-1011)^2(2022b-1011)(2022c-1011)} + \sqrt[3]{(2022b-1011)^2(2022a-1011)\cdot(2022c-1011)} + \sqrt{(2022c-1011)^2(2022a-1011)(2022b-1011)}}{(2022a-1011)(2022b-1011)(2022c-1011)}$